HİPOTEZ TESTLERİ

DERS NOTLARI

Prof.Dr. Mehmet Ali CENGİZ

Prof.Dr.Yüksel TERZİ

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ
SAMSUN
2018

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1.1. Temel kavramlar

Uygulamalarda çoğu zaman örneklemden elde dilen bilgiler yardımıyla anakütle parametreleri hakkında bir karara varmaya çalışılır. Örneğin yeni bir öğretim sisteminin eskisinden farklı olup olmadığına karar verilebilir. Burada önemli olan nokta, bu farkların rastgele seçimin sonucu olan örnekleme hatalarından mı ileri geldiği, yoksa gerçekten bir değişmenin olduğunun belirlenmesidir.

Bu farkların istatistiksel açıdan anlamlı (önemli) olup olmadığına bazı testler sonucunda karar verilir.

Anakütleler gösterdikleri olasılık dağılışları ile tanımlanırlar. Bu dağılışlar bilindiği taktirde popülasyonlar hakkında verilecek kararlar kesinlik kazanır. Fakat anakütle dağılışları genellikle bilinmez. Dolayısıyla da bu tip kararların verilebilmesi zordur.

Anakütleler hakkında bilgi edinmenin diğer bir yolu örneklemedir. Uygun bir şekilde seçilen şans örnekleri yardımıyla anakütlenin gösterdiği dağılışa ait parametreler tahmin edilir. Belirli varsayımlara dayanarak örneklerden elde edilen bu tahminler yardımıyla belli bir risk karşılığında popülasyonlar veya bunların gösterdiği dağılışlar hakkında çeşitli kararlar verilir. Bu **kararlar verilirken ya bir tahmin yapılır ya da konu ile ilgili belirli bir varsayımda bulunulur**. Gerçekleşsin veya gerçekleşmesin ileri sürülen bu tip varsayımlara ***HİPOTEZ*** denir.

Hipotez kısaca doğruluğu bir araştırma ya da deney ile test edilmeye çalışılan öngörülere denir. Hipotez testleri bir örneklem ortalaması ile bu örneklemin çekilmiş olduğunu düşündüğümüz ortalaması etrafındaki farkın anlamlı olup olmadığını (yani önemli bir fark olup olmadığını) araştırmamızı sağlayan testlerdir.

Eğer iki anakütlenin ortalamaları arasındaki fark ile ilgileniyorsak; bunlardan çekilen örneklemlerin ortalamalar arasındaki farka ait hipotez testleri yaparak, farkın doğru olup olmadığını anlayabiliriz.

İstatistiksel hipotezler anakütle parametrelerine ilişkin olarak ileri sürülen ve geçerliliği olasılık kanunlarına göre araştırılabilen özel önermelerdir. İstatistiksel hipotezlerin diğer hipotezlerden farkı, hipotezin bir frekans bölünmesiyle ilgili olmasıdır. Örneğin *"belirli bir markayı taşıyan akülerin ortalama ömrünün 2.5 saat olduğu*nu ileri sürdüğümüzde bir hipotez önermiş oluruz. Bunun anlamı normal olan bir dağılımın aritmetik ortalaması 2.5 saate eşittir.

Bir hipotez ya doğru ya da yanlıştır. Bunu araştırmak için anakütleden rastgele seçilmiş belli bir örneklemdeki birimler incelenir ve bu örneklemden hareketle hipotezin geçerli olup olmadığı hakkında bir karara varılır. **Örneklem istatistiklerinden yararlanarak bir hipotezin geçerli olup olmadığını ortaya koyma işlemine *istatistiksel hipotez testi* veya *hipotez testi* denir.**

ÖZET

Hipotez karşılaşılan özel duruma ilişkin bir önermedir.

İstatistiksel hipotez herhangi bir anakütle parametresine ilişkin olarak ileri sürülen ve doğruluğu olasılık kurallarla araştırılabilen önermedir.

1.1.1.Sıfır Hipotezi ve Karşıt Hipotez

Hipotez testinde bir hipotezle onun karşıtı diğer bir hipotezden hangisinin örneklemden elde edilen sonuç ile daha iyi bağdaştığı araştırılmaktadır. Karşılaştırılan iki hipotezden birine sıfır hipotezi (istatistiksel hipotez), diğerine ise karşıt hipotez (araştırma hipotezi) adı verilir. Hipotezlerin daima örneklem alınmadan önce kurulması gerekir.

İstatistiksel bir araştırmada iki tür hipotez kurulur. "Eşit, fark yoktur, önemli değildir, en az(fazla) … kadardır" biçiminde kurulan hipoteze **"yokluk (null), boş ya da sıfır hipotezi"** denir ve H_0 ile gösterilir. H_0 hipotezine karşı test edilen hipoteze ise **"alternatif (alternative), seçenek ya da karşıt hipotez "** denir ve H_1 ile gösterilir.

H_0 ve H_1 hipotezleri genelde aşağıdaki gibi kurulur.

H_0: Örneklemden elde edilen değer ile anakütlenin bilinen değeri arasında bir fark yoktur.

H_1: Örneklemden elde edilen değer ile anakütlenin bilinen değeri arasında bir önemli (anlamlı) bir fark vardır.

Genellikle araştırmacılar sıfır hipotezinin reddedilmesini ve karşıt hipotezin kabul edilmesini isterler. Eskiden beri geçerli sayılmış önerme sıfır hipotezi, yeni görüş ise karşıt hipotezi olur.

$H_0 : p = p_0$

$H_1 : p \neq p_0$ veya

$H_1 : p > p_0$ veya

$H_1 : p < p_0$ şeklinde kurulur.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ veya

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$ veya

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$ şeklinde kurulur.

Bu ifadeler araştırırcının konu ile ilgili ön yargısına bağlı olarak değişir. Eğer araştırıcı I. uygulamanın II. uygulamadan iyi olacağına dair ön yargısı varsa H_1: $\mu_1 > \mu_2$ şeklinde kurulur. Hiçbir ön yargısı yoksa, H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ şeklinde kurulur.

Hipotez testleri için temel varsayımlar:

- Örneğe alınan birimler birbirlerinden bağımsız olarak seçilmiş olmalıdırlar.
- Anakütle(ler) normal dağılıma sahip olmalıdır (Parametrik hipotez testleri için).
- İki bağımsız anakütle söz konusu ise bunların varyansları_eşit olmalıdır (Parametrik hipotez testleri için).

Hipotez testinin aşamaları

1) Hipotezlerin oluşturulması
2) Anlam düzeyinin (α) belirlenmesi
3) Örnekleme dağılımının belirlenmesi
4) Ret bölgesinin belirlenmesi
5) Test istatistiğinin hesaplanması ve yorum

1) Hipotezlerin Oluşturulması: "Sıfır hipotezi" ana kütle parametresinin önceden belirlenmiş, bilinen değerini göstermektedir. "Karşıt hipotez" ise, sıfır hipotezinin reddi halinde kabul edilmesi gereken hipotezdir. Bazen bir, bazen de birden fazla karşıt hipotez söz konusu olabilir. Ancak hipotez test edilirken, tek bir karşıt hipotez ileri sürüleceği açıktır. Hemen ekleyelim ki bazı hallerde sıfır hipotezinin reddi durumunda karşıt bir hipotez kabul edilmez. Ne var ki, daha öncede belirtildiği gibi pratik bir yarar sağlamadığından bu yola nadiren başvurulmaktadır. Karşıt hipotezin sıfır hipotezinden "farklı" veya "büyük" yahut "küçük" oluşuna göre testler çift veya tek "büyük" yahut "küçük" oluşuna göre testler çift veya tek taraflı olmaktadır. Testte aşağıdaki üç takım testten birincisine veya ikincisine başvurulduğunda "tek taraflı test", üçüncüsü dikkate alındığında "çift taraflı test" söz konusu olur.

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: \varphi = \varphi_0 & \\ H_1: \varphi > \varphi_0 & (1) \\ & \\ H_0: \varphi = \varphi_0 & (2) \\ H_1: \varphi < \varphi_0 & \end{array}\right\} \text{Tek Taraflı Test} \qquad \left.\begin{array}{ll} H_0: \varphi = \varphi_0 & \\ H_1: \varphi \neq \varphi_0 & (3) \end{array}\right\} \text{Çift Taraflı Test}$$

Uygulanacak olan testin tek taraflı mı, yoksa çift taraflı mı olacağını tespit etmek için, verilecek karar göz önünde bulundurulur. Meselâ, problem yeni geliştirilen bir üretim sisteminin uygulanıp uygulanamayacağı ise tek taraflı testin tercih edilmesi yerinde olur. Nitekim yeni geliştirilen üretim sistemi, eskisine göre daha üstün olmadıkça hiçbir kimse bunu işletmesinde kullanmak istemez. Buna karşılık, problem meselâ bir paketleme makinesinin normal çalışıp çalışmadığını kararlaştırmak ise çift taraflı bir testten yararlanabilir. Çünkü paketlerin tespit edilen standart ağırlıktan daha hafif veya daha ağır olması aynı sonucu yani makinenin iyi çalışmadığını gösterir.

2) Anlamlılık Düzeyinin Seçilmesi: Gerek I. tip hatayı gerekse II. tip hatayı minimuma indirecek şekilde α 'nın çeşitli istatistiksel tekniklerle belirlenmesi mümkün ise de, test yapanın α ve β hatalarına vereceği önem de α' nın seçiminde rol oynamaktadır. Genellikle %1 ve %5 anlamlılık düzeyleri kullanılmakta ve kararın etkilenmesi için α' nın değeri testin başlangıcında tespit edilmektedir.

3) Örnekleme Dağılımının Belirlenmesi: Örneklemin incelenmesiyle elde edilecek sonuçlar olasılığa dayanılarak yorumlanacağından uygun bir olasılık bölünmesinin belirlenmesi zorunlu hale gelir. Daha önce de belirttiğimiz gibi, anakütle normal bölündüğünde veya ana kütle normal bölünse bile örneklem hacmi yeteri kadar büyük ($n \geq 30$) olduğunda örnekleme bölünmesi normal bölünme mahiyetinde olmaktadır. Dolayısıyla, örneklem hacminin yeteri kadar büyük olması halinde testlerde normal bölünmeye başvurabilir.

4) Ret Bölgesinin Belirlenmesi: Anlamlılık düzeyinin belirlenmesi ile birlikte ret bölgesinin büyüklüğü de tespit edilmiş olur. Diğer taraftan karşıt hipoteze göre de ret bölgesinin yeri belirlenir. Karşıt hipotez, anakütle parametresinin sıfır hipotezinde belirlenmiş olan ana kütle parametresinden daha büyük (H_1:θ>θ_0) veya daha küçük (H_1:θ<θ_0) bir değer olduğu şeklinde ise ret bölgesi ilk durumda bölünmenin sağ ucunda, 2. durumda sol ucunda bulunur. Buna karşılık, karşıt hipotez ana kütle parametresinin sıfır hipotezinde belirlenene eşit olmadığı (H_1:$\theta \neq \theta_0$) yolunda ise ret bölgesi bölünmenin her iki ucunda yer alır.

5)Test İstatistiğinin Hesaplanması: İstatistiksel karar, ileri sürülen sıfır hipotezi ile örneklemlerden elde edilmiş ortalama, oran vs. gibi istatistiklerin kıyaslanması sonucu ve örneklem istatistiği ile sıfır hipotezinde belirlenmiş olan ana kütle parametresi arasındaki farkı standart hata birimleriyle ifade eden bir ölçüye ihtiyaç vardır. Kısaca üzerinde test kurulan örneklem istatistiğine “test istatistiği” denir.

1.2. Birinci ve İkinci Tip Hatalar

Bir hipotez testi sonucunda örneklem istatistiklerine göre şu dört durumdan birisi gerçekleşmiş olur.

- **I.** H_0 gerçekte doğrudur ve reddedilmemiştir (kabul edilmiştir).
- **II.** H_0 gerçekte doğrudur, fakat reddedilmiştir (kabul edilmemiştir).
- **III.** H_0 gerçekte yanlıştır, fakat reddedilmemiştir (kabul edilmiştir).
- **IV.** H_0 gerçekte yanlıştır ve reddedilmiştir (kabul edilmemiştir).

Tablo 1.1. Birinci ve İkinci Tip Hatalar

		Gerçek Durum	
		Ho Doğru	**Ho Yanlış**
Test Sonucu	**Ho Red**	**I. Tip Hata P(I. Tip Hata)= α**	**Doğru Karar=1-β**
	Ho Kabul	**Doğru Karar=1-α**	**II. Tip Hata P(II. Tip Hata)= β**

α : Gerçekte doğru olan sıfır hipotezinin reddedilmesi olasılığını (anlamlılık düzeyini),

1-α : Gerçekte doğru olan sıfır hipotezinin reddedilmeme (kabul edilmesi) olasılığını yani testin güvenilirlik düzeyini,

β : Gerçekte yanlış olan sıfır hipotezinin reddedilmeme (kabul edilmesi) olasılığını,

1-β :Gerçekte yanlış olan sıfır hipotezinin reddedilmesi olasılığını yani testin gücünü gösterir.

Ho hipotezi doğru iken reddedilmesi olasılığı **"I. Tip hata (Type I error) "** olarak adlandırılır.

$$\alpha = P(\text{Ho Red}|\text{Ho Dogru}) = P(\text{I. Tip hata yapma})$$

Bu olasılık (α) aynı zamanda **"anlamlılık düzeyi (significance level)"** ya da

“ önemlilik düzeyi” olarak da adlandırılır. Hipotez testi yapılırken önceden belirlenen α genellikle 0.01, 0.05 ve 0.10 olarak alınır.

Ho hipotezi yanlış iken, kabul edilmesi olasılığı **“ II. Tip hata (Type II error) “** olarak adlandırılır.

$$\beta = \mathrm{P(Ho\ Kabul|\ Ho\ Yanlıs) = P(II.\,Tip\ Hata\ Yapma)}$$

Ho hipotezi doğru iken, kabul edilmesi olasılığı (1- α) olup **“ güven düzeyi (confidence level) “** olarak adlandırılır.

$$1-\alpha = P(\mathrm{Ho\ Kabul\ |\ Ho\ Dogru})$$

Ho hipotezi yanlış iken, reddedilmesi olasılığı (1- β) olup **“testin gücü (power test) “** olarak adlandırılır.

$$1-\beta = P(\mathrm{Ho\ Red|\ Ho\ Yanlıs})$$

Hipotez testlerinde öncelikle, yokluk ve seçenek hipotezleri belirlenir. Daha sonra α anlamlılık düzeyine karar verilir. α ‘ nın 0.01 ve 0.05 gibi küçük seçilmesinin nedeni, doğru olan bir hipotezi reddetme olasılığının olabildiğince küçük olmasının istenmesidir. Test istatistiğinin hesaplanmasından sonra hipotez hakkında iki şekilde karar verilir:

- Test istatistiği tablo değeri ile karşılaştırılır.

- Test istatistiğine ilişkin p- değeri hesaplanır ve α ile karşılaştırılır ($p \leq 0.05$ ise Ho hipotezi reddedilir).

- Son aşamada hipotez hakkında verilen kararlar yorumlanır.

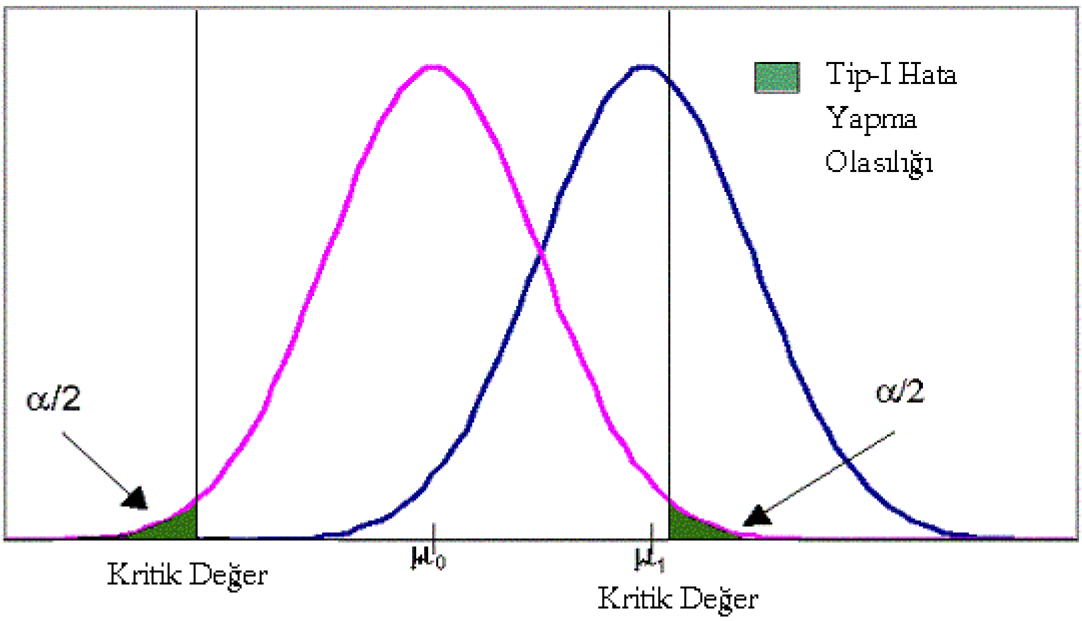
<u>Ho gerçekten doğru</u> ise araştırıcı bu doğru iddiayı testin sonucundaki hesapladığı değere göre **<u>ret ederse</u>**, hata yapmış olacaktır, istatistikte buna **“I. Tip Hata”** denir. Bu hatanın yapılması olasılığı da (α) ile gösterilir. Bu olasılık “testin önem düzeyi” veya “anlamlılık düzeyi” olarak da adlandırılır. Yani α=0.05 önem düzeyinde test yapıldı dendiğinde, bunun anlamı; araştırıcı doğru bir Ho hipotezini ret etmek için 0.05 lik bir hata yapma riskini kabulleniyor demektir. Bu genelde hipotez kurulurken peşinen kabul edilen risktir.

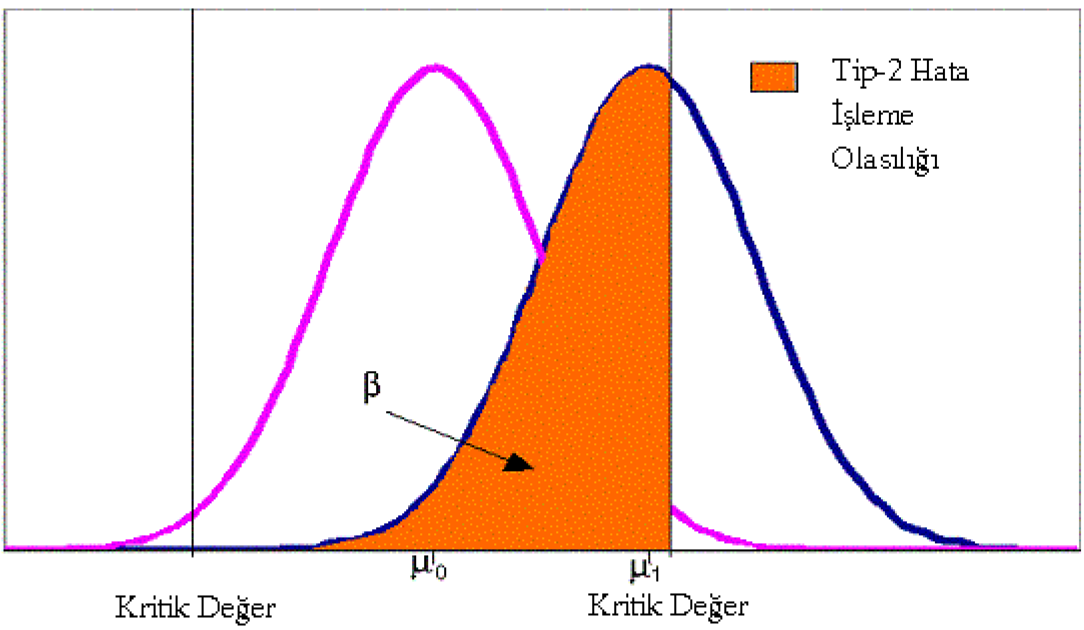
Araştırıcı istatistik testi yapabilmesi için belirli bir düzeyde hata yapma riskini de üzerine alması gerekir, aksi halde test yapamaz.

Araştırıcı istatistik test yaparken bir başka şekilde de hata yapabilir. Bu da, **<u>Ho ile ileri sürülen iddia gerçekten doğru değilse</u>** ve araştırıcı test istatistiğinde elde ettiği değere bakarak bu yanlış iddiayı **<u>kabul ederse</u>** yine hata yapmış olacaktır. Bu tip hata ya da istatistik de **“II. Tip Hata”** denir. II Tip Hata yapma olasılığı β ile gösterilir.

Genelde istatistikte α'nın değeri %5 veya %1 olarak sabit seçilir. β nın değeri için alışılmış bir değer yoktur.

Hipotez testinde amaç sıfır hipotezini ret veya kabul etmek olduğundan, I. ve II. tip hataları aynı anda işlemek mümkün değildir. İstatistik testler yapılırken bu hata olasılıkları mutlaka vardır ve her ikisini aynı anda küçültmek mümkün değildir. α küçülürken β büyür, β küçülürken α büyür.





Sıfır hipotezi ret edilemediği zaman hala zihinlerde iki olasılık vardır:

a) Sıfır hipotezi gerçekten doğrudur.
b) Sıfır hipotezi yanlıştır. Yani istatistikte de uygulama önemli etkiye sahip değildir denmesi, onun gerçekten etkisiz olduğunu göstermez, örnek büyüklüğü yeterli olmayabilir. Bu durumda testin gücünü hesaplamak gerekir. Test güçlü ise karar doğru olabilir, testin gücü az ise karardan şüphe duyulur.

İstatistiksel olarak önemli farklılık bulunmuştur denildiğinde, bunun anlamı Ho hipotezi reddedilmiştir demektir. Araştırıcı eğer α'yı küçük tutmayı yeğliyorsa, bu Ho gerçekten doğru ise bunu reddetme riskini azaltıyor demektir. Araştırıcı buna kendi karar verir.

Örnek 1.1. İstatistik test mantıksal olarak bir ceza mahkemesinde yapılan işin aynını yapmaktadır. Tüm şüphelenmelere rağmen "Sanık suçu ispatlanana kadar masumdur" mantığı hâkimdir. Sanık hariç sanığın avukatı dâhil mahkemedeki herkesin zihninde sanığın suçlu olduğuna dair bir şüphe her zaman vardır (H_1).

Mahkemenin her kararını %100 doğrulukla verdiğini hiç kimse söyleyemez, bir çok kez gerçek suçlunun beraat ettiğini (β) veya suçsuz birinin mahkum olabildiğini görmüşüzdür (α).

Mahkeme	**Önem Testi**
İddia: Her sanık suçlu bulunana kadar masumdur .	**Ho: μ=0, ilacın etkisi yoktur.**
İddia: Sanık suçludur	**H_1: $\mu \neq 0$, ilaç etkilidir.**
Delil toplama	***Araştırma yapma (Örnek büyüklüğü)***
Toplanan delillerin değerlendirilmesi	**Veri/İstatistik test**
Yasalar, ilgili yasa maddeleri	**İstatistik kurallar, varsayımlar (Normallik, varyans homojenliği vs)**
Karar	**Test sonucu**
Yanlış karar: Masum bir sanığın mahkum olması	**I. Tip hata (Ho gerçekten doğru olduğu halde bunun reddi, yani ilaç gerçekten etkisiz olduğu halde delillere göre etkili bulmak)**
Yanlış karar: Suçlunun mahkemece delil yetersizliğinden serbest bırakılması	**II. Tip hata (Ho gerçekten yanlış olduğu halde bunun kabulü, yani ilaç gerçekten etkili olduğu halde delillere bakarak etkisiz olarak bulmak)**

Mahkeme iki tip hatayı da yapabilmektedir.

- *Masum birinin suçlu bulunması I. Tip hatadır* (işlenme olasılığı α dır).

- *Suçlu birinin beraat ettirilmesi II Tip hatadır* (işlenme olasılığı β dır).

II. Tip hata veride anlamlı bir şeyler varsa bunun göz ardı edilmesi hatasıdır. Yani mahkemede suçla ilgili bazı göstergeleri olan, ama yeterli görülmeyen birinin beraat ettirilmesi gibi.

II. Tip hatanın işlenmesi birçok faktöre bağlıdır. Bunlardan *ilki* eldeki veri suç göstergesi olarak ne kadar bilgi taşıyor. Eğer göstergeler çok güçlü ise II Tip hatanın işlenmesi olasılığı fazla olmaz. *İkinci faktör* suç göstergesi olan bilgiler arasındaki değişkenliktir. Yani delil olarak toplanan bilgiler çok fazla değişkense, kendi arasında çok farlılık gösteriyorsa hata yapma olasılığı artar.

Üçüncü faktör delil olarak toplanan bilginin yeterli miktarda olması gerekir, yani örnek büyüklüğü doğru kararın verilmesinde önemli bir etmendir. Eğer toplanan delil sayısı az ise II Tip hata yapma olasılığı artar. Çok fazla delil toplandığında yani büyük denekli çalışmalarda II. Tip hata yapma olasılığı çok düşüktür, küçük çalışmalarda II. Tip hata yapma olasılığı büyüktür.

Mahkemede karar verirken yanlış yasa kullanılarak doğru karar verilemeyeceğine göre, istatistikte de varsayımlar tutmuyorsa verilen kararın doğruluğu şüphe götürür. Yani her yöntemin hangi varsayımlar altında doğru karar vermeye yardımcı olacağını bilmek gerekir. Diğer bir ifade ile verilerin analizinden önce mutlaka varsayımların testleri yapılarak kontrol edilmelidir.

Örnek 1.2. Ali ortağının kendisini aldattığından şüphelidir. Bu bakımdan birbirlerini tamamlayan aşağıdaki hipotezleri ileri sürer.

H_0:Ortağım beni aldatıyor,

H_1:Ortağım beni aldatmıyor,

Bu önermelerin, doğrulukları henüz bilinmediği için, test edilmeleri gerekir. Hipotezlerin testi için elde bazı kanıtlar bulunmalıdır. Burada kanıtlar, ortağının sık sık yurtdışına çıkması, ev eşyalarını değiştirmesi, kendisinden daha lüks bir hayat yaşaması vb. olabilir. Kanıtların yeterlilik derecesi ne olursa olsun, varılacak sonuç hatalı olabilecektir. Yani Ali elindeki kanıtlara dayanarak ‘‘Ortağım beni aldatıyor’’ veya ‘‘Ortağım beni aldatmıyor’’ sonucunu çıkarırsa, bu iki sonuçta hatalı olabilir. Bu ifadelerimizi bir tablo üzerinde gösterelim.

Ali’nin çıkardığı Sonuç	**Ortağı Ali’yi Gerçekten**	
	Aldatıyor	Aldatmıyor
Ortağım beni aldatıyor	Doğru Karar	II. Tip Hata(β)
Ortağım beni aldatmıyor	I. Tip Hata(α)	Doğru Karar

Günlük hayattan alınan örneklerde söz konusu kararlardaki hatalar. I.tip hata ve II. tip hata gibi teknik terimlerle anlatılamaz. Bunun yerine ‘‘Dikkat et, ortağın sana kazık atıyor’’ veya ‘‘Günahını alıyorsun adamcağızın’’ gibi ifadeler kullanılır. Yukarıdaki örnekte yapılacak hatadan hangisinin daha önemli olduğuna Ahmet kişisel olarak karar verecektir. Oysa bilimsel çalışmalarda araştırmacı karar verirken benzeri bir kişisel tercih yapamazlar.

Hipotezin Reddedilememesi, Kesin Kabulü Anlamına mı Geliyor?

Sıfır hipotezi ret edilemediği zaman, bu onun kabulü anlamını tam taşımıyor. Çünkü mahkemede “sanık mevcut delillere göre suçlu bulunmadı” denmesi onun gerçekten suçsuz olduğunu göstermez, sadece mevcut delillerle suçu ispatlanamadı anlamını taşımaktadır.

Eğer istatistiksel analizler sonucunda test istatistiği (hesap değeri) kritik değerden (tablo değeri) küçük ise yokluk hipotezi ret edilemez denilir. Burada H_0 hipotez kabul edildi denilmez. Çünkü gözlenen verilerle yokluk hipotezini ret edemedik. Başka bir veri topluluğu ile yokluk hipotezi ret edilebilirdi.

Örneğin biz eski, yırtık, kirli elbiseli bir adam gördüğümüzde;

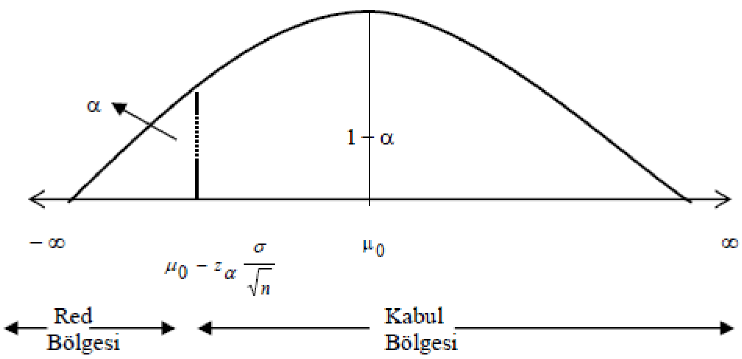
H_0: Bu adam fakirdir.

Diye yokluk hipotezini kurduğumuzu varsayalım. Bu adamı takip ettiğimizde para harcamadığını, otobüse binmeyip, yürüme gittiğini gördüğümüzde iddianın doğruluğu hakkında bize deliller sunacaktır. Ancak bu adam hakkında tüm gerçekleri bilmediğimiz sürece yokluk hipotezinin kabul edileceğini söyleyemeyiz. Çünkü bu adamı daha detaylı araştırdığımızda bankada hesabında bir milyon dolar olduğunu görüyoruz. Bu da hipotezin ret edilmesi için geçerli bir sebeptir.

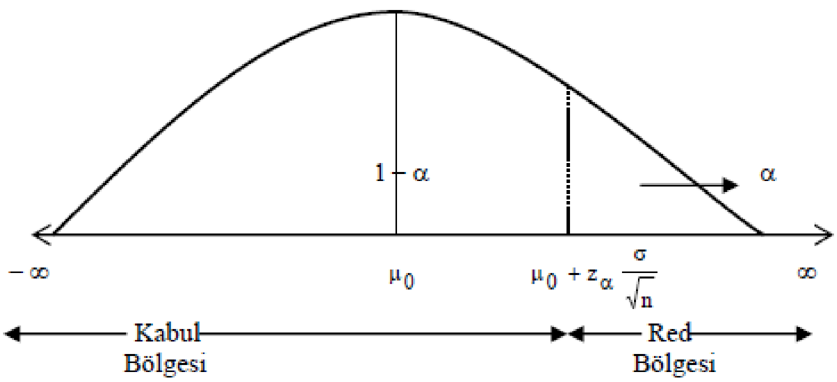
1.3. Test İstatistiği, Kritik Bölge, Kritik Değer

H_0 hipotezinin reddedilip edilemeyeceğini gösteren sayısal değerlere “ **test istatistiği (test statistics) “** denir. Z, t, F ve χ^2 gibi test istatistiklerinin değerleri test edilen hipotez hakkında karar vermemizi sağlar. H_0 hipotezinin reddedildiği bölgeye **“kritik bölge (critical region)”** denir. C ile gösterilir. C, örneklem uzayının bir alt kümesidir $C \subset (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Kritik bölge, ret bölgesi olarak da adlandırılır. H_0 hipotezinin kabul edildiği bölgeye “ kabul bölgesi (acceptance- region) “ denir. Hipotez testlerinde ret bölgesini, kabul bölgesinden ayıran değere “kritik değer (critical value)” denir. H_0 hipotezine karşı tek yönlü seçenek hipotezi kurulduğunda kritik bölgenin olasılık büyüklüğü α ‘ ya , iki yönlü seçenek hipotezi kurulduğunda kritik bölgenin her bir bölümünün olasılık büyüklüğü $\alpha/2$ ‘ ye eşittir.

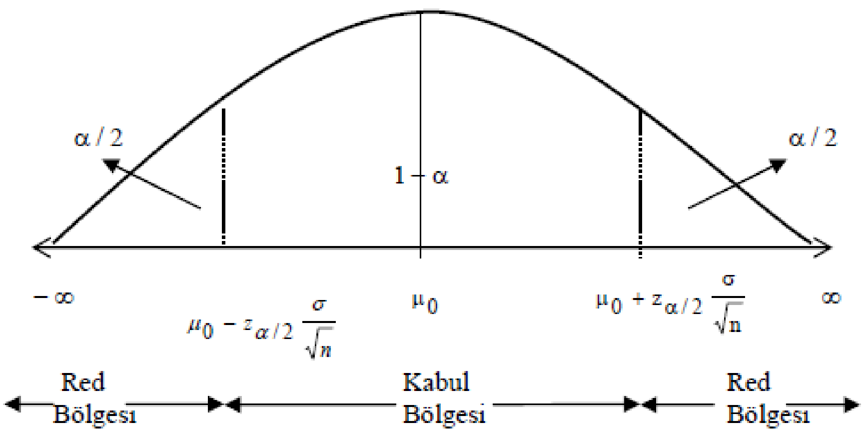
a) $H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ (tek taraflı hipotez kritik bölge sol kuyrukta)



b) $H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$ (tek taraflı hipotez kritik bölge sağ kuyrukta)



c) $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$ (çift taraflı hipotez kritik bölge her iki kuyrukta)

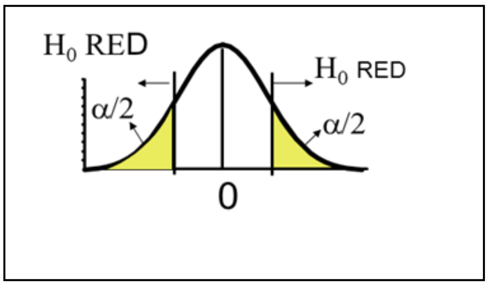


Güç eğrisi (power curve), yatay eksende parametrenin (θ, p, μ gibi) değerleri düşey eksende testin gücü $(1-\beta)$ olacak şekilde çizilen grafiktir. Eğer düşey eksende $(1-\beta)$ güç değerleri yerine II. Tür hata olasılığı (β) değerleri oluyorsa

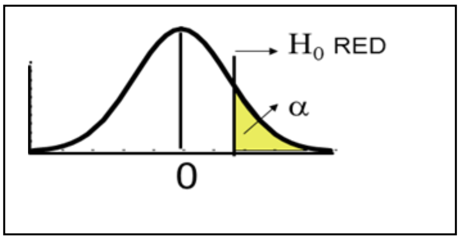
“ karakteristik eğrisi” denir.

Örnek 1.3. Bir para denemesinde hipotezler üç farklı şekilde kurulabilir.

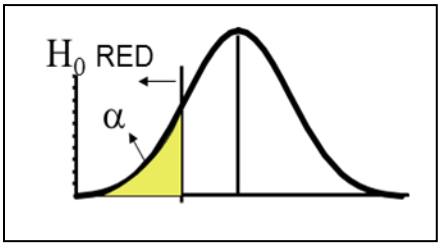
H_0 : P=0.5 Para hilesizdir
H_1 : P≠ 0.5 Para hilelidir (Çift yönlü)



H_0 : P=0.5 Para hilesizdir
H_1 : P> 0.5 Para hilelidir (Tek yönlü)



H_0 : P=0.5 Para hilesizdir.
H_1 : P< 0.5 Para hilelidir (Tek yönlü)



Örnek 1.4. Ankara'daki üniversitelerde okuyan öğrencilerin okula gidiş-dönüşte harcadığı toplam süre 80 dakikadan fazla olduğu iddia edilmektedir. Varyans 441 olarak biliniyor. H_0 hipotezini test etmek amacıyla tesadüfi olarak çekilen 9 süre aşağıdaki gibi saptanmıştır.

$X_i(Dakika)$: 95, 70, 120, 65, 130, 38, 110, 90, 60

$\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde iddiayı test ediniz.

Çözüm:

Hipotezler;

$$H_0: \mu = 80$$

$$H_1: \mu > 80$$

Burada,

$$\bar{X}_h = \frac{778}{9} = 86.44$$

olarak bulunur.

$E(\bar{X}_0) = 80$ ve $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{441}{9} = 49$

elde edilir. Ankara'daki üniversitelerdeki öğrencilerin okula gidiş-dönüşte harcadıkları süreye göre dağılımın normal olduğu varsayımı ve H_0 hipotezinin doğruluğu altında, $\bar{X}$ istatistiğinin örnekleme dağılımı da normal, yani $\bar{X}_0 \sim N(80, 49)$'dir.

$\bar{X}_k^{'}$ kritik değerini *Z* dönüşümünden sağlamak mümkündür. Önce $P(\bar{X}_0 \ > \bar{X}_k') = \alpha$

Şöyle ki;

$P(Z_{hes} > Z_{tab}) = 0.05$ ve $Z_{tab} = 1.64$

$P(Z_{hes} > 1.64) = 0.05$ tir. Burada

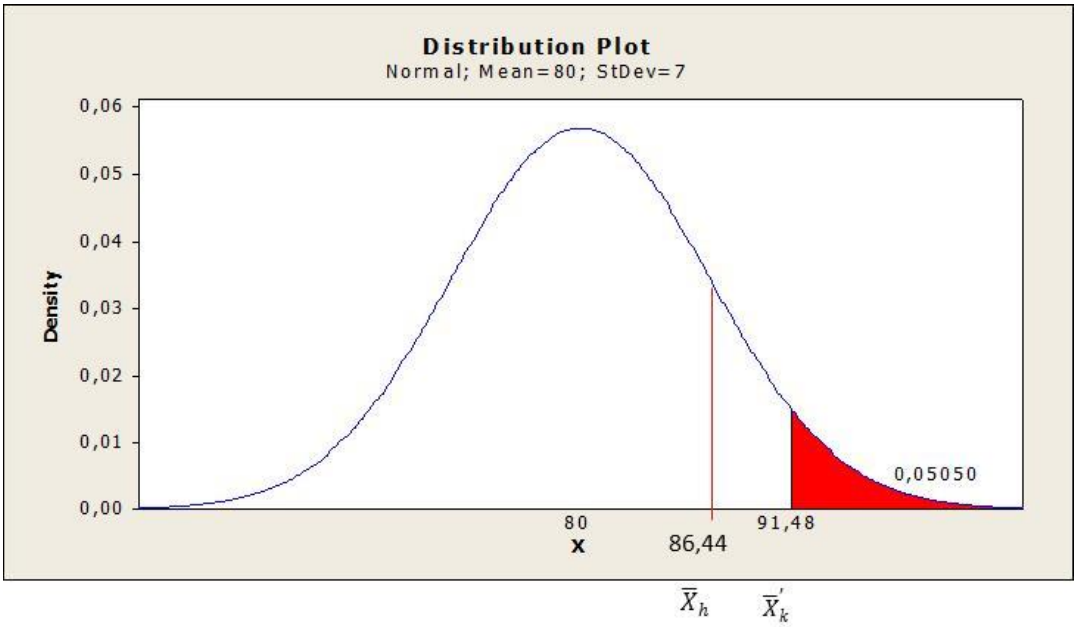
$Z_{hes} = \frac{\bar{X}_0 - E(\bar{X})}{\sigma_{\bar{X}}}$ olduğu için;

$$P\left(\frac{\bar{X}_0 - E(\bar{X})}{\sigma_{\bar{X}}} > 1.64\right) = 0.05$$

$$P\left(\frac{\bar{X}_0 - 80}{7} > 1.64\right) = 0.05$$

$$P(\bar{X}_0 > 91.48) = 0.05$$

$\bar{X}_k^{'} = 91.48$ olarak bulunur. Bu durumda, $\bar{X}_0$ istatistiğinin örnekleme dağılımı üzerinde ret ve kabul bölgeleri gösterilebilir. Demek ki $\bar{X}_h$ değeri $\bar{X}_k^{'}$ değerinden büyük olduğu zaman H_0 hipotezi reddedilir.



Burada $\bar{X}_h = 86.44 < \bar{X}_k^{'} = 91.48$ olduğundan, yokluk hipotezi reddedilmez.

Örnek 1.5. Tatil amacıyla Türkiye'ye gelen yabancı uyrukluların ortalama konaklama süresi 20 günden küçük olduğu iddia edilmektedir. Bu hipotezi test etmek için rastgele 16 yabancı uyruklu seçilerek Türkiye'deki konaklama süreleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$X_i(Gün): 10, 22, 11, 9, 2, 9, 1, 25, 20, 12, 5, 5, 10, 15, 5, 22$$

$\sigma^2 = 100$ ve yığının dağılımı normal iken $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde kararımız ne olur.

Çözüm: Hipotezler;

$$H_0: \mu = 20$$

$$H_1: \mu < 20$$

$E(\bar{X}_0) = 20$ ve $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{100}{16} = 6.25 \;\rightarrow\; \bar{X}_0 \sim N(20, 6.25)$ olduğu açıktır. Yukarıdaki veriden;

$\bar{X}_h = \frac{183}{16} = 11.4375$ olarak bulunur. H_1 hipotezi nedeniyle ret bölgesi sol kuyruk tarafındadır.

Burada $\bar{X}_k$ kritik değeri $P(\bar{X}_0 < \bar{X}_k) = \alpha$ olmasını sağlamalıdır. $\bar{X}_k$ kritik değeri yine Z dönüşümünden bulunabilir.

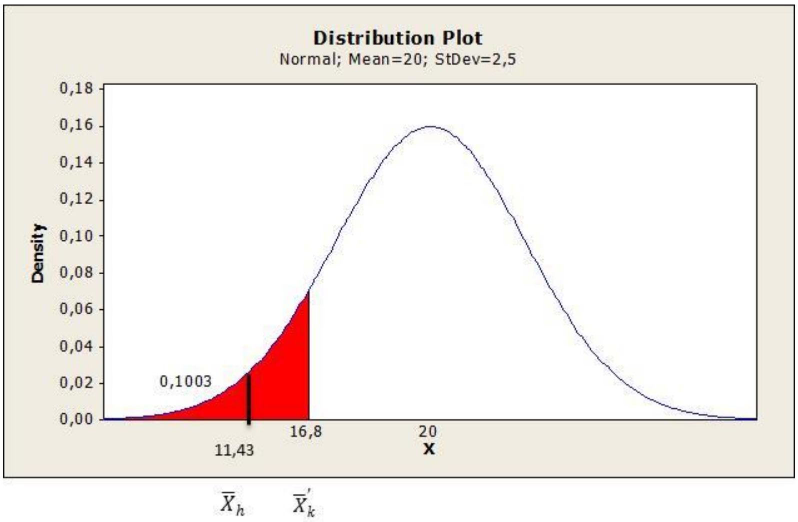
$P(Z > 1.28) = 0.10$ olduğundan dağılımın simetrik olması nedeniyle $P(Z < -1.28) = 0.10$ olur.

$$P\left(\frac{\bar{X}_0 - 20}{\sqrt{6.25}} < -1.28\right) = 0.10$$

$$P(\bar{X}_0 < 16.80) = 0.10$$

olur. Buna göre $\bar{X}_k = 16.80$ elde edilir. Bu durumda $\bar{X}_0$ istatistiğinin örnekleme dağılımı üzerinde ret ve kabul bölgeleri gösterilebilir.

$\bar{X}_h$ ret bölgesinde olduğundan, $11.4375 < 16.80$, H_0 reddedilir.



Örnek 1.6. Ankara'nın merkez ilçesinde oturanların haftalık ortalama kültürel amaçlı harcamaları 60 TL'den farklı olduğu iddia edilmektedir. Yokluk hipotezini test etmek için rastgele seçilen 9 birimlik bir örnekten aşağıdaki değerler elde edilmiş olsun.

$$X_i(TL): 35, 60, 70, 95, 30, 110, 80, 95, 130$$

$\sigma^2 = 900$ ve yığının dağılımı normal iken $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde kararımız ne olur?

Çözüm:

Hipotezler;

$$H_0: \mu = 60$$

$$H_1: \mu \neq 60$$

$E(\bar{X}_0) = 60$ ve $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{900}{9} = 100$ → $\bar{X}_0 \sim N(60, 100)$ olduğu açıktır. H_1 hipotezi nedeniyle iki yanlı test için ret bölgeleri $\bar{X}_0$ dağılımının her iki ucunda yer alır. Yukarıdaki veriden;

$$\bar{X}_h = \frac{705}{9} = 78.33$$

olarak bulunur. $\bar{X}_{k1}$ ve $\bar{X}_{k2}$ kritik değerleri $P(\bar{X}_0 < \bar{X}_{k2}) = {}^{\alpha}/_{2}$ ve $P(\bar{X}_0 > \bar{X}_{k1}) = {}^{\alpha}/_{2}$ olmasını sağlamalıdır. Bu değerler Z dönüştürmesi aracılığıyla bulunabilir.

$P(Z_{hes} > Z_{tab}) = 0.025$ ve $Z_{tab} = 1.96$

$P(Z_{hes} > 1.96) = 0.025$

$$P\left(\frac{\bar{X}_0 - 60}{10} > 1.96\right) = 0.025$$

$$P(\bar{X}_0 > 79.6) = 0.025$$

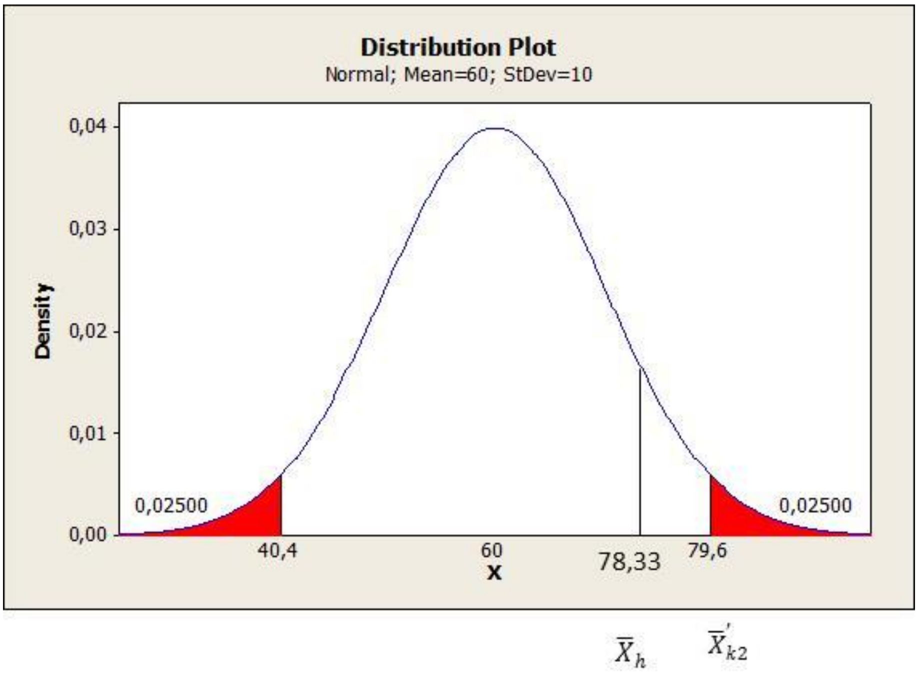
ve dağılımın simetrik olması nedeniyle,

$P(Z_{hes} > 1.96) = 0.025 \rightarrow P(Z_{hes} < -1.96) = 0.025$ olur.

$$P\left(\frac{\bar{X}_0 - 60}{10} < -1.96\right) = 0.025$$

$$P(\bar{X}_0 < 40.4) = 0.025$$

bulunur. Böylece $\bar{X}_{k1} = 79.6$ ve $\bar{X}_{k2} = 40.4$ olarak elde edilir. $\bar{X}_0$ istatistiğinin örnekleme dağılımı üzerinde ret ve kabul bölgeleri aşağıda görülmektedir.



$\overline{X}_h = 78.33$ değeri kabul bölgesinde olduğundan H_0 hipotezi reddedilmedi.

Örnek 1.7. Ankara'da şehir içi ulaşımda en çok metroyu kullananların oranı % 60 ' tan küçüktür iddiası için H_0 ve H_1 hipotezleri aşağıdaki gibi olur.

$$H_0: \pi = 0.60$$

$$H_1: \pi < 0.60$$

Yokluk hipotezini test etmek için rastgele seçilen 200 birimlik bir örnekten 80 'ninin şehir içi ulaşımda en çok metroyu kullandığı saptanmış olsun. 1. tip hata olasılığı 0.05 ise kararımız ne olur?

Çözüm:

H_0 hipotezi doğru iken,

$E(P) = \pi$ ve $\sigma_P^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$ olur. n büyük olduğunda merkezi limit kuramı gereğince

$$P_0 \sim N(0.60, \frac{0.60(1-0.60)}{200})$$

olduğu açıktır.

P_k kritik değeri $P(P_0 < P_k) = \alpha$ olmasını sağlamalıdır.

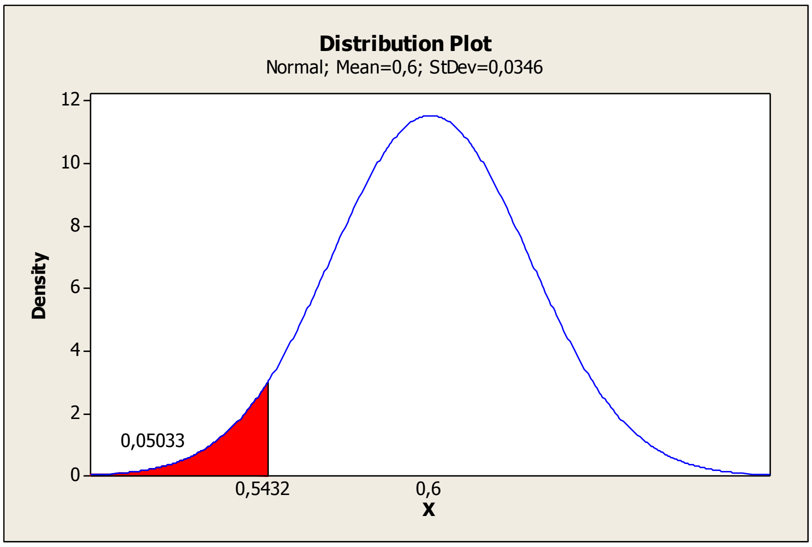
$$P(Z < -1.64) = 0.05$$

olduğundan Z yerine;

$$P\left(\frac{P_0 - 0.60}{0.0346} < -1.64\right) = 0.05$$

$$P(P_0 < 0.5432) = 0.05$$

olur. Böylece $P_k = 0.5432$ elde edilir.



P istatistiğinin $n = 200$ birimlik örnekten hesaplanan değeri $P_h = \frac{80}{200} = 0.40$ olur. Bu değer ret bölgesinde olduğundan yokluk hipotezi reddedilir.

Örnek 1.8. Kayıtlı bulundukları bölüme isteyerek gelen öğrencilerin oranı 0.50' den farklıdır iddiası için hipotezler aşağıdaki gibidir.

$$H_0: \pi = 0.50$$

$$H_1: \pi \neq 0.50$$

Yokluk hipotezini test etmek için rastgele seçilen 100 öğrenci rastgele seçilerek bunlardan 35'inin kayıtlı bulundukları bölüme isteyerek geldikleri saptanmıştır. 1. tip hata olasılığı 0.01 iken kararımız ne olur?

Çözüm:

H_0 hipotezi doğru iken,

$E(P) = 0.50$ ve $\sigma_P^2 = \frac{0.50(1-0.50)}{100}$ olur. n büyük olduğunda merkezi limit kuramı gereğince

$$P_0 \sim N(0.50, \frac{0.25}{100})$$

olduğu açıktır. Bu durumda P_{k1} ve P_{k2} kritik değerleri

$P(P_0 > P_{k1}) = {}^{\alpha}/_{2}$ ve $P(P_0 < P_{k2}) = {}^{\alpha}/_{2}$ olmasını sağlamalıdır.

$P(Z > Z_{tab}) = 0.005$ ise $Z_{tab} = 2.58$

olduğundan Z yerine;

$$P\left(\frac{P_0 - 0.50}{\sqrt{0.0025}} > 2.58\right) = 0.005$$

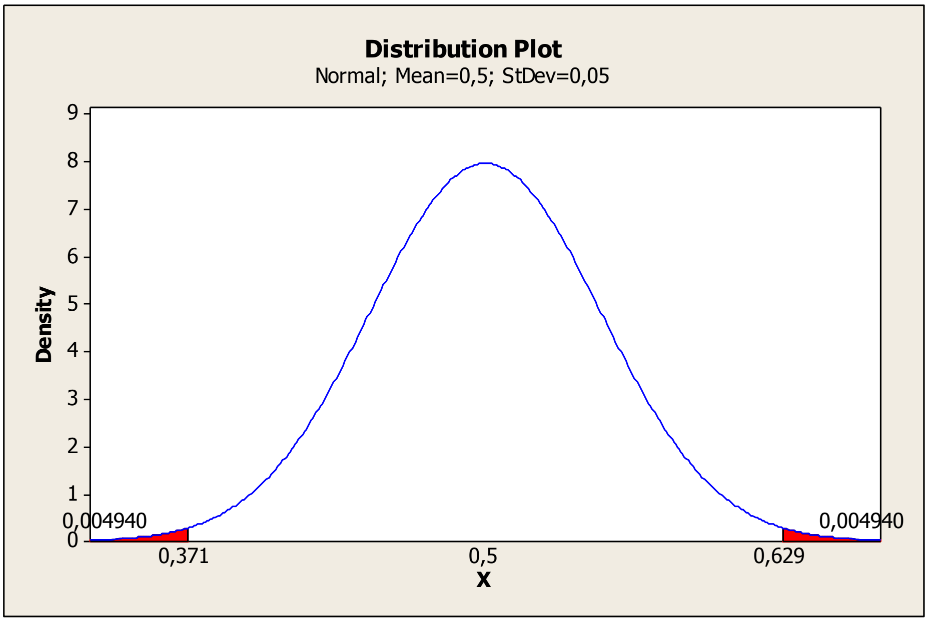
$$P(P_0 > 0.629) = 0.005$$

$P(Z < -2.58) = 0.005$

$$P\left(\frac{P_0 - 0.50}{\sqrt{0.0025}} < -2.58\right) = 0.005$$

$$P(P_0 < 0.371) = 0.005$$

olur. Bu sonuçlara göre $P_{k1} = 0.629$ ve $P_{k2} = 0.371$ hesaplanır.



$$P_h = \frac{35}{100} = 0.35$$

değeri ret bölgesinde olduğundan yokluk hipotezi reddedilir. H_1 hipotezi kabul edilir.

Ödev: Akdeniz Bölgesindeki A turistik yöresinin yaz aylarındaki günlük sıcaklık ortalamasının 25 derecenin altında olduğu iddia edilmektedir. Varyans ise 36 derecedir. H_0 hipotezini test etmek amacıyla tesadüfi olarak çekilen 9 günün sıcaklık ortalaması şöyle gözlenmiştir.

$$X_i: 22\ 19\ 27\ 23\ 18\ 17\ 19\ 20\ 15$$

$\alpha = 0.05$ anlamlılık seviyesinde iddiayı test ediniz.

Çözüm:

Hipotezler;

$$H_0: \mu = 25$$

$$H_1: \mu < 25$$

$E(\bar{X}_0) = 25$ ve $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{36}{9} = 4 \rightarrow \bar{X}_0 \sim N(25, 4)$ olduğu açıktır. Yukarıdaki veriden;

$\bar{X}_h = \frac{180}{9} = 20$ olarak bulunur. H_1hipotezi nedeniyle ret bölgesi sol kuyruk tarafındadır.

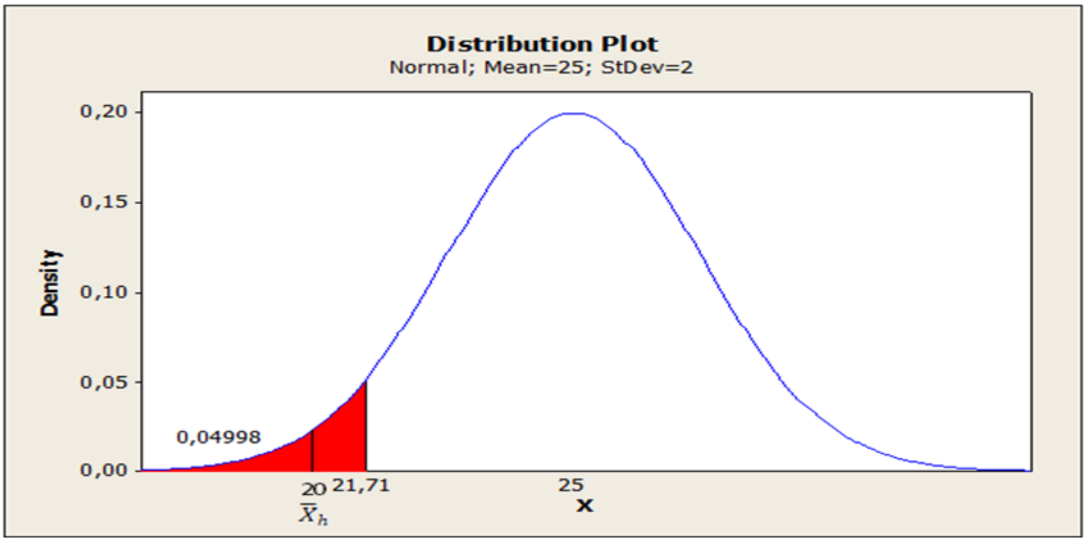
Burada $\bar{X}_k$ kritik değeri $P(\bar{X}_0 < \bar{X}_k) = \alpha$ olmasını sağlamalıdır. $\bar{X}_k$ kritik değeri yine Z dönüşümünden bulunabilir.

$P(Z > Z_{tab}) = 0.05$ olduğundan dağılımın simetrik olması nedeniyle $P(Z < Z_{tab}) = 0.50$ olur ve $Z_{tab} = -1.645$

$$P\left(\frac{\bar{X}_0 - 25}{2} < -1.645\right) = 0.05$$

$$P(\bar{X}_0 < -21.71) = 0.05$$

olur. Buna göre $\bar{X}_k = -21.71$ elde edilir. Bu durumda $\bar{X}_0$ istatistiğinin örnekleme dağılımı üzerinde ret ve kabul bölgeleri gösterilebilir.



$\bar{X}_h = 20$ ret bölgesinde olduğundan, H_0 hipotezi reddedilir.

Ödev: Piyasaya sürülen A marka margarinlerin ortalama 250 gr. dan farklı olduğu iddiası üzerine, çeşitli yerlerden tesadüfi olarak alınan 7 adet margarinin ağırlıkları şöyle gözlenmiştir.

$$X_i(gr.): 252\ 270\ 265\ 253\ 240\ 252\ 260$$

Varyans 100 olarak bilindiğine göre iddiayı 0.01 anlamlılık seviyesinde test ediniz.

Çözüm: Hipotezler;

$$H_0: \mu = 250$$

$$H_1: \mu \neq 250$$

$E(\bar{X}_0) = 250$ ve $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{100}{7} = 14.286 \rightarrow \bar{X}_0 \sim N(250, 14.286)$ olduğu açıktır. H_1 hipotezi nedeniyle iki yanlı test için ret bölgeleri $\bar{X}_0$ dağılımının her iki ucunda yer alır. Yukarıdaki veriden;

$$\bar{X}_h = 256$$

olarak bulunur. $\bar{X}_{k1}$ ve $\bar{X}_{k2}$ kritik değerleri $P(\bar{X}_0 < \bar{X}_{k2}) = \alpha/2$ ve $P(\bar{X}_0 > \bar{X}_{k1}) = \alpha/2$ olmasını sağlamalıdır. Bu değerler Z dönüştürmesi aracılığıyla bulunabilir.

$P(Z_{hes} > Z_{tab}) = 0.005$ ve $Z_{tab} = 2.575$

$P(Z_{hes} > 2.575) = 0.005$

$$P\left(\frac{\bar{X}_0 - 250}{3.78} > 2.575\right) = 0.005$$

$$P(\bar{X}_0 > 259.7335) = 0.005$$

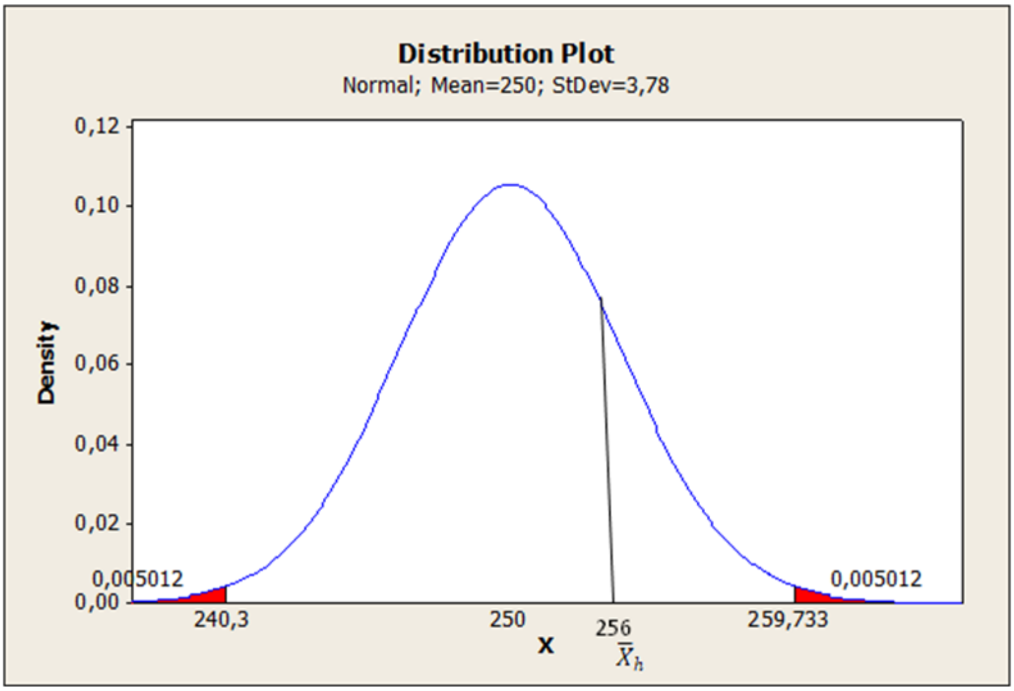
ve dağılımın simetrik olması nedeniyle,

$P(Z_{hes} < -2.575) = 0.005$ olur.

$$P\left(\frac{\bar{X}_0 - 250}{3.78} < -2.575\right) = 0.005$$

$$P(\bar{X}_0 < 240.2665) = 0.005$$

bulunur. Böylece $\bar{X}_{k1} = 259.7335$ ve $\bar{X}_{k2} = 240.2665$ olarak elde edilir. $\bar{X}_0$ istatistiğinin örnekleme dağılımı üzerinde ret ve kabul bölgeleri aşağıda görülmektedir.

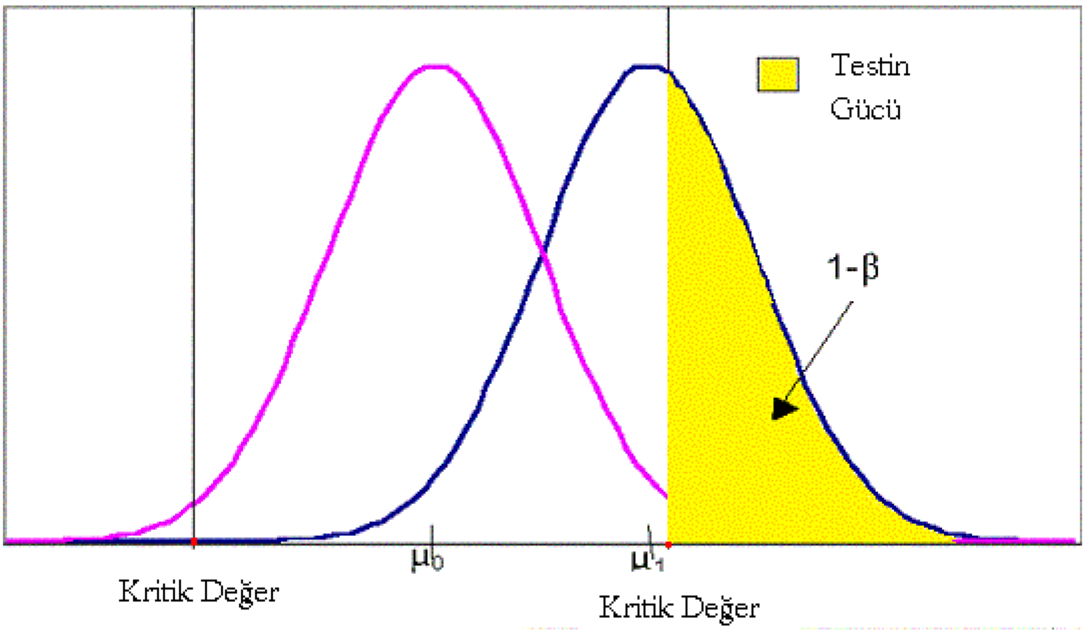


$\overline{X}_h = 256$ değeri kabul bölgesinde olduğundan, H_0 hipotezi reddedilemez.

1.4. Testin Gücü

Bir testin istatistiksel gücü (1-β), yanlış kurulan bir sıfır hipotezinin test sonucunda ret edilme olasılığıdır. Araştırmacılar istatistiksel testlerin sonucunun ne kadar güvenilir olduğuna karar verebilmek için testin gücüne bakmaları gerekmektedir.

Testin gücü, Z test istatistiğinin σ, n ve α ' ya bağlı olmasından dolayı σ, n ve α 'nın bir fonksiyonudur. Buna göre standart sapma azalırken, testin gücü artar. n, örneklem büyüklüğü artarken, testin gücü artar. α anlamlılık düzeyi artarken (α azalırsa anlamlılık düzeyi artar.) testin gücü artar.



Bir testin gücü aşağıdaki adımlarla artırılabilir.

1. **1.** μ_0 ile μ_1 arasındaki mesafe (etki büyüklüğü) artırılarak
2. **2.** Örnek dağılışının standart sapması azaltılarak (genelde örnek büyüklüğü artırılarak bu yapılabilir)
3. **3.** Tip-I hata olasılığını (α) artırarak

Örnek 1.9. Özel sektörde çalışan üniversite mezunlarının aylık ortalama kültürel amaçlı harcamaları 60 TL'den fazla olduğu iddia edilmektedir. Rastgele seçilen 9 birimlik bir örnekten aşağıdaki veri derlenmiştir.

$$X_i\ (TL): 90, 50, 40, 120, 115, 80, 65, 70, 80$$

$\sigma^2 = 225$ ise $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde kararımız ne olur?

Çözüm: Hipotezler;

$$H_0: \mu = 60$$

$$H_1: \mu > 60$$

Yukarıda verilen yokluk hipotezinin doğru ve yığına ilişikin dağılımın normal olduğu varsayımı altında;

$E(\bar{X}_0) = 60$ ve $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{225}{9} = 25 \ \rightarrow \bar{X}_0 \sim N(60, 25)$

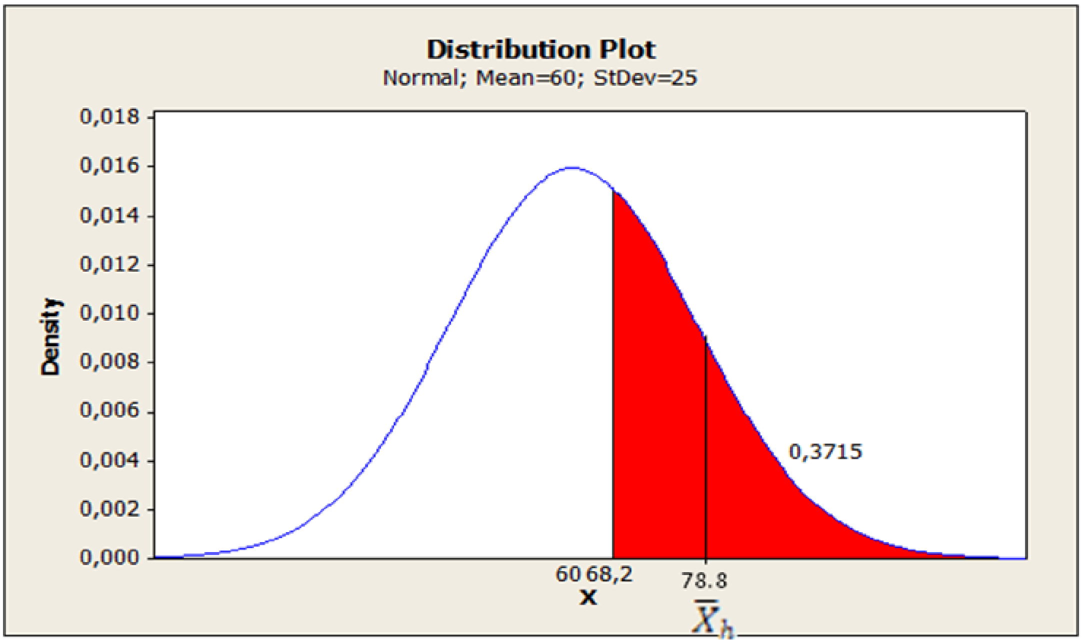
olur. $\alpha = 0.05$ olduğundan Z tablosundan,

$$P(Z > 1.64) = 0.05$$

$$P\left(\frac{\bar{X}_0 - E(\bar{X})}{\sigma_{\bar{X}}} > 1.64\right) = P\left(\frac{\bar{X}_0 - 60}{5} > 1.64\right) = 0.05$$

$$P(\bar{X}_0 > 68.20) = 0.05$$

olur. Bu sonuca göre $\bar{X}_k = 68.20$ elde edilir.



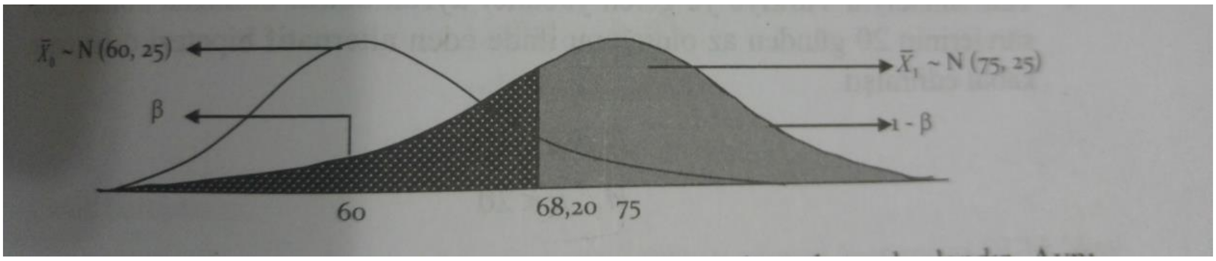
$\overline{X}_h = \frac{710}{9} = 78.88$ değeri ret bölgesinde olduğundan H_0 Hipotezi reddedilir.

Bu durumda, $\mu > 60$ olmak üzere, yığın ortalamasının her farklı değeri için $1-\beta$ ve β olasılıkları hesaplanabilir. Yığına ilişkin gerçek ortalama $\mu_G = 75$ ise testin gücü ve 2. tip hata olsılığı nedir?

Yığına ilşkin gerçek ortalama 75 ise bu durumda, bu yığından seçilecek *n* hacimli örnekler için örnekleme dağılımının ortalaması ve varyansı;

$E(\overline{X}_1) = \mu_G = 75$, $\sigma^2_{\overline{X}} = 25$ ve yığın dağılımıda normal olduğundan $\overline{X}_1 \sim N(75{,}25)$ olur.

$\overline{X}_0 \sim N(60{,}25)$ ve $\overline{X}_1 \sim N(75{,}25)$ normal dağılımları aşağıdaki gibidir.



$1-\beta$ olasılığı $\overline{X}_1 \sim N(75, 25)$ dağılımı üzerine açık renk taralı alandır. Aynı dağılım üzerinde koyu renk taralı alan β olasılığını verir.

β, $1-\beta$, α ve $1-\alpha$ için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$1-\beta = P(\bar{X}_1 > 68.20)$$

$$\beta = P(\bar{X}_1 < 68.20)$$

$$\alpha = P(\bar{X}_0 > 68.20)$$

$$1-\alpha = P(\bar{X}_0 < 68.20)$$

Bunlardan testin gücü ve 2. tip hata olasılıkları

$$1-\beta = P\left(Z > \frac{68.20-75}{5}\right) = P(Z > -1.36)$$

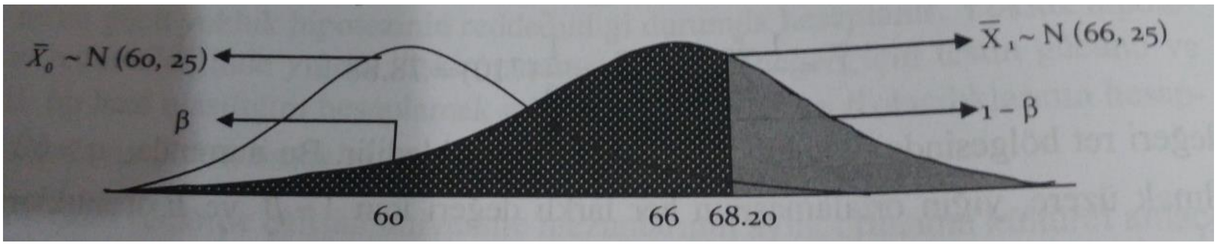
$$= P(Z < 1.36) = 0.9131$$

$$\beta = 0.0869$$

olarak hesaplanır.

Aynı problemde $\mu_G = 66$ ise testin gücü nedir?

Gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini reddetme olasılığı



$$1-\beta = P(\bar{X}_1 > 68.20) = P\left(Z > \frac{68.20-66}{5}\right)$$

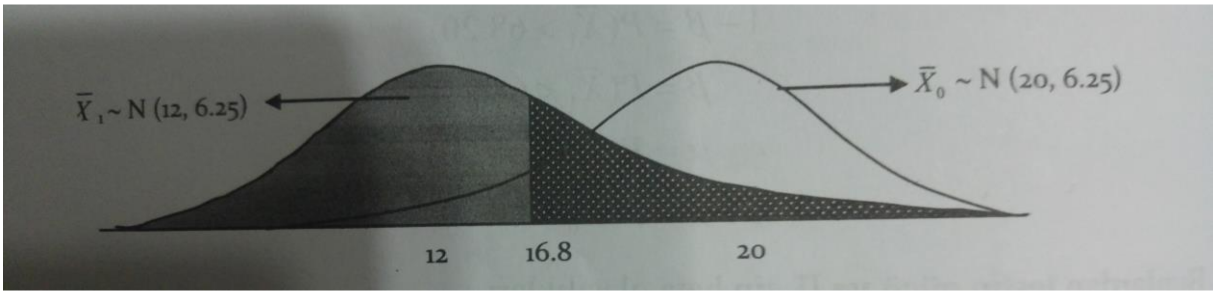
$$= P(Z > 0.44) = 1 - P(Z < 0.44) = 0.6700$$

Örnek 1.10. Tatil amacıyla Türkiye'ye gelen yabancı uyrukluların ortalama konaklama sürelerinin 20 günden az olduğunu ifade eden alternatif hipotezi daha önce kabul edilmişti.

Hipotezler; $H_0: \mu = 20$ $\quad H_1: \mu < 20$

$E(\bar{X}_0) = 20$, $\sigma_{\bar{X}}^2 = 6.25$, $\alpha = 0.10, \bar{X}_k = 16.80$ ve $\bar{X}_h = 11.4375$ olduğundan yokluk hipotezi reddedilmişti. Yabancı uyrukluların Türkiye'de konaklamalarına ilişkin gerçek ortalama 12 gün ise testin gücünü bulunuz.

Çözüm:



Bu problemde β, $1-\beta$, α ve $1-\alpha$ için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$1 - \beta = P(\bar{X}_1 < 16.80)$$

$$\beta = P(\bar{X}_1 > 16.80)$$

$$\alpha = P(\bar{X}_0 < 16.80)$$

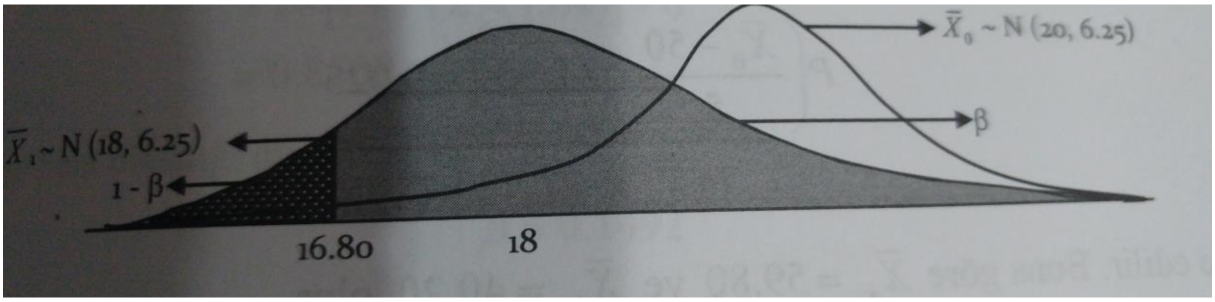
$$1 - \alpha = P(\bar{X}_0 > 16.80)$$

Bunlardan $1-\beta$ olasılığı;

$$1 - \beta = P\left(Z < \frac{16.80 - 12}{2.5}\right) = P(Z < 1.92) = 0.9726$$

olarak hesaplanır.

$\mu_G = 18$ ise testin gücü nedir?



$$1-\beta = P(\bar{X}_1 < 16.80) = P\left(Z < \frac{16.80-18}{2.5}\right)$$

$$= P(Z < -0.48) = 1 - P(Z < 0.48) = 0.3156$$

olarak hesaplanır.

Örnek 1.11. Bir ilçede oturanların aylık ortalama şehir içi ulaşım harcamaları 50 TL'den farklıdır iddiası için H_0 ve H_1 hipotezleri

$$H_0: \mu = 50$$

$$H_1: \mu \neq 50$$

şeklinde yazılabilir. Rastgele seçilen 36 birimlik bir örnekten $\bar{X}_h = 80$ olarak hesaplanmıştır. $\sigma^2 = 900$ iken $\alpha = 0.05$ ise kararımız ne olur?

H_0 hipotezinin doğruluğu altında ve merkezi limit kuramı gereğince

$E(\bar{X}_0) = 50$, $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{900}{36} = 25$ ise $\bar{X}_0 \sim N(50{,}25)$

dir. $\alpha = 0.05$ olduğundan,

$$P(Z > 1.96) = P(Z < -1.96) = 0.025$$

eşitliklerinde Z yerine;

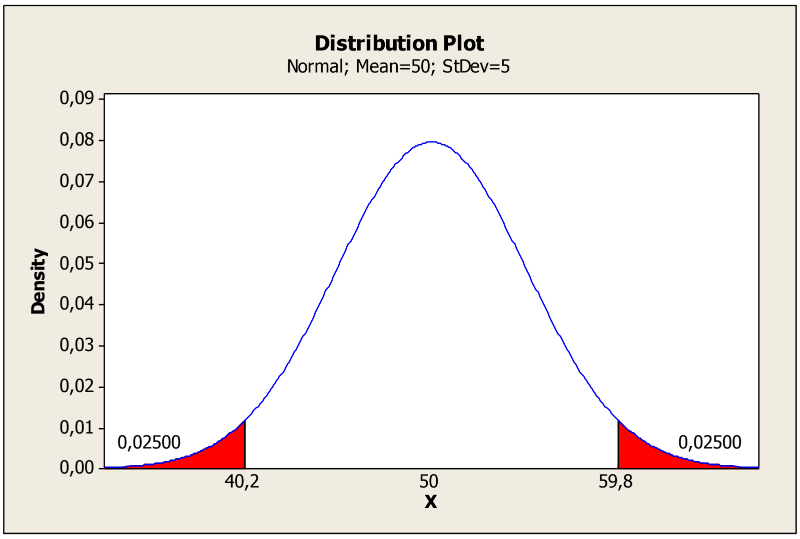
$$P\left(\frac{\bar{X}_0 - 50}{5} > 1.96\right) = 0.025$$

$$P(\bar{X}_0 > 59.80) = 0.025$$

$$P\left(\frac{\bar{X}_0 - 50}{5} < -1.96\right) = 0.025$$

$$P(\bar{X}_0 < 40.20) = 0.025$$

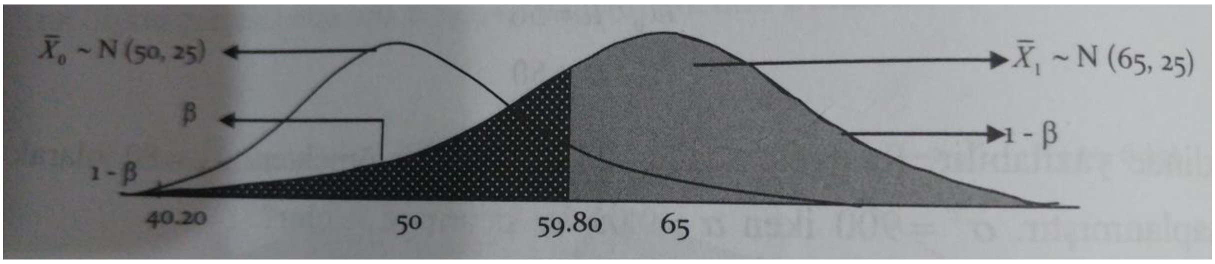
Buna göre $\bar{X}_{k1} = 59.80$ ve $\bar{X}_{k2} = 40.20$ olur.



$\bar{X}_h = 80$ değeri ret bölgesinde olduğundan yokluk hipotezi reddedilir.

Bu durumda, yine, gerçek ortalamanın her farklı değeri için $1-\beta$ ve β olasılıklarını hesaplamak mümkündür.

$\mu_G = 65$ iken testin gücünü hesaplayalım:



Bu problemde, β, $1-\beta$, α ve $1-\alpha$ için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$1-\beta = P(\bar{X}_1 > 59.80) + P(\bar{X}_1 < 40.20)$$

$$\beta = P(40.20 < \bar{X}_1 < 59.80)$$

$$\alpha = P(\bar{X}_0 > 59.80) + P(\bar{X}_0 < 40.20)$$

$$1-\alpha = P(40.20 < \bar{X}_0 < 59.80)$$

Bunlardan testin gücü;

$$1 - \beta = P\left(Z > \frac{59.80 - 65}{5}\right) + P(Z < \frac{40.20 - 65}{5})$$

$$= P(Z > -1.04) + P(Z < -4.96)$$

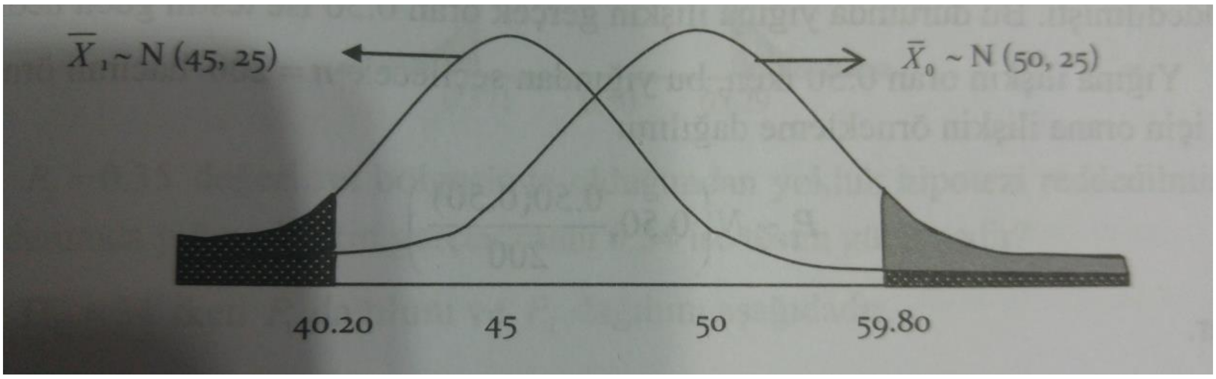
$$= 1 - [1 - P(Z < 1.04)] + 0$$

$$= 0.8508$$

ve 2. tip hata olasılığı da $\beta = 0.1492$ dir.

$\mu_G = 45$ ise $1 - \beta$ olasılığını hesaplayalım.

Bu durumda örnek ortalamasının



Yukarıdaki koyu renkli alanların değeri,

$$1 - \beta = P(\bar{X}_1 > 59.80) + P(\bar{X}_1 < 40.20)$$

$$1 - \beta = P\left(Z > \frac{59.80 - 45}{5}\right) + P(Z < \frac{40.20 - 45}{5})$$

$$= P(Z > 2.96) + P(Z < -0.96)$$

$$= 1 - P(Z < 2.96) + [1 - P(Z < 0.96)]$$

$$= 1 - 0.9985 + 1 - 0.8315 = 0.1700$$

olarak bulunur.

Örnek 1.12. İlköğretim okulları ikinci sınıf sonu itibariyle öğrencilerin dakikada ortalama 80 kelime okudukları ve varyansın 144 kelime olduğu bilinmektedir. Tesadüfi olarak seçilen 9 öğrencinin bir dakikada okudukları kelime sayısı şöyle verilmiştir.

$$X_i: 112, 105, 95, 98, 85, 118, 104, 97, 104$$

Ortalama okuma hızının dakikada 80 kelimenin üzerinde olduğu iddiasına katılabilir misiniz? 0.05 anlamlılık seviyesinde yığına ait değerlerin normal dağıldığını varsayarsak iddiayı test ediniz.

Çözüm:

$$H_0: \mu = 80$$

$$H_1: \mu > 80$$

$E(\bar{X}_0) = 50$, $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{144}{9} = 16$ ise $\bar{X}_0 \sim N(80,16)$ ve $\bar{X}_h = \frac{918}{9} = 102$

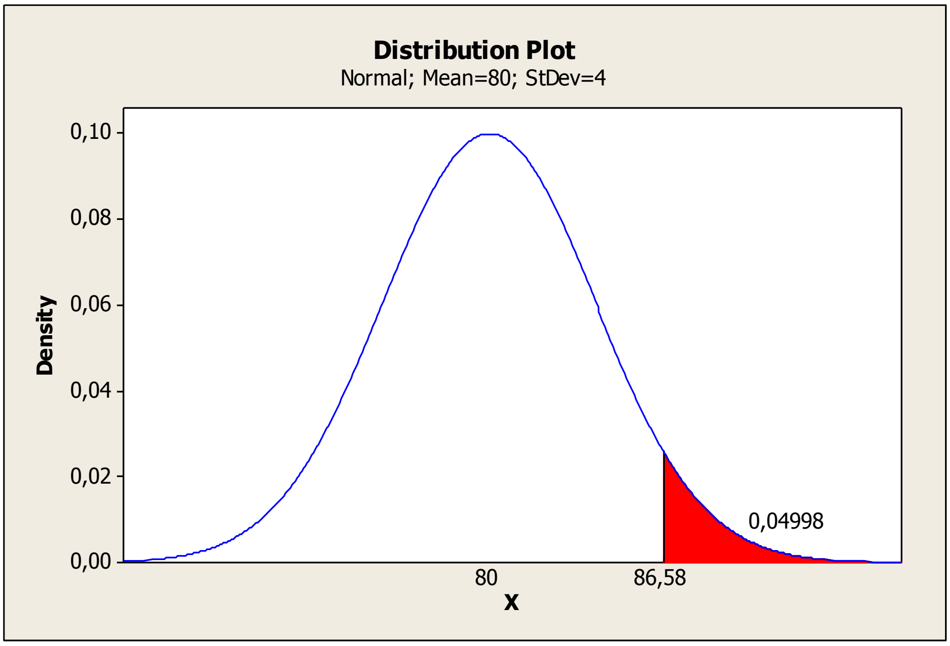
1. Tip hata 0.05 olduğu için Z dönüşümü ile

$$P(Z > 1.645) = 0.05$$

$$P\left(\frac{\bar{X}_0 - 80}{4} > 1.645\right) = 0.05$$

$$P(\bar{X}_0 > 86.58) = 0.05$$

elde edilir.

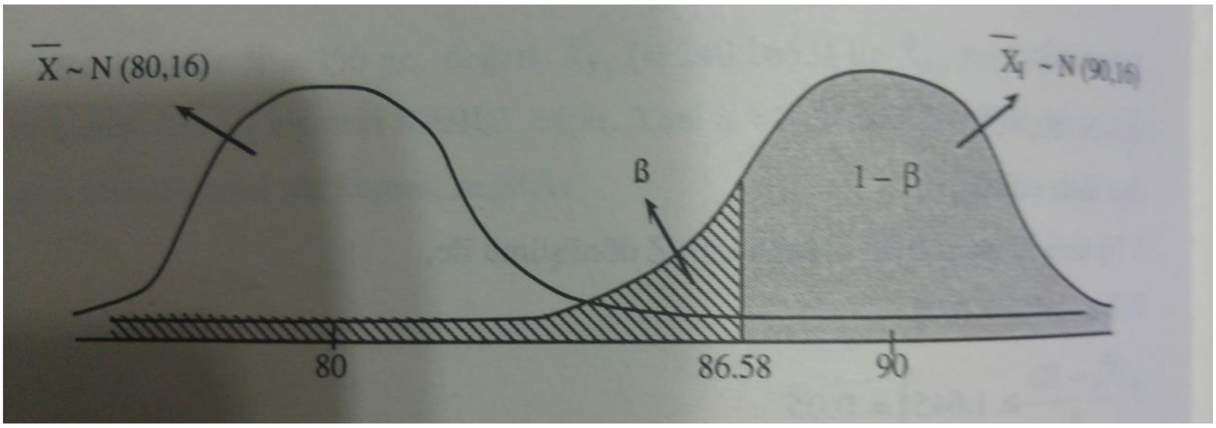


$\bar{X}_h = 102$ değeri ret bölgesinde düştüğü için H_0 hipotezi reddedilir.

Bu durumda yığın ortalamasının her gerçek değeri için testin gücü hesaplanabilir.

$\mu_G = 90$ iken testin gücünü ve 2. tip hatayı hesaplayalım;

$\bar{X}_0 \sim N(80,16)$, $\bar{X}_1 \sim N(90, 16)$ dağılımları aşağıdaki şekil üzerinde gösterilmiştir.



$$1 - \beta = P(\bar{X}_1 > 86.58)$$

$$\beta = P(\bar{X}_1 < 86.58)$$

$$\alpha = P(\bar{X}_0 > 86.58)$$

$$1 - \alpha = P(\bar{X}_0 < 59.80)$$

Buradan testin gücü için;

$$1 - \beta = P(\bar{X}_1 > 86.58)$$

$$P\left(Z > \frac{86.58 - 90}{4}\right) = P(Z > -0.855) = P(Z < 0.855)$$

$$1 - \beta = P(Z < 0.855)$$

$$1 - \beta = 0.8037$$

$\beta = 0.1963$ olarak elde edilir.

Örnek 1.13. A şehrindeki fırıncıların üretmiş oldukları ekmeğin ağırlığının normal dağıldığı, bir ekmeğin ortalama 350 gr. olduğu ve varyansının ise 400 gr. olduğu bilinmektedir. Tesadüfi olarak seçilen 10 ekmeğin ağırlıkları aşağıdaki gibidir.

$$X_i(gr.): 335, 340, 350, 330, 320, 315, 320, 325, 310, 305$$

Üretilen ekmeklerin 350 gramın altında olduğu iddiasını 0.10 anlamlılık seviyesinde araştırınız.

Çözüm:

Hipotezler;

$$H_0: \mu = 350$$

$$H_1: \mu < 350$$

$E(\bar{X}_0) = 350,\ \sigma^2_{\bar{X}} = \frac{400}{10} = 40$ ise $\bar{X}_0 \sim N(350{,}40)$ ve $\bar{X}_h = \frac{3250}{10} = 325$

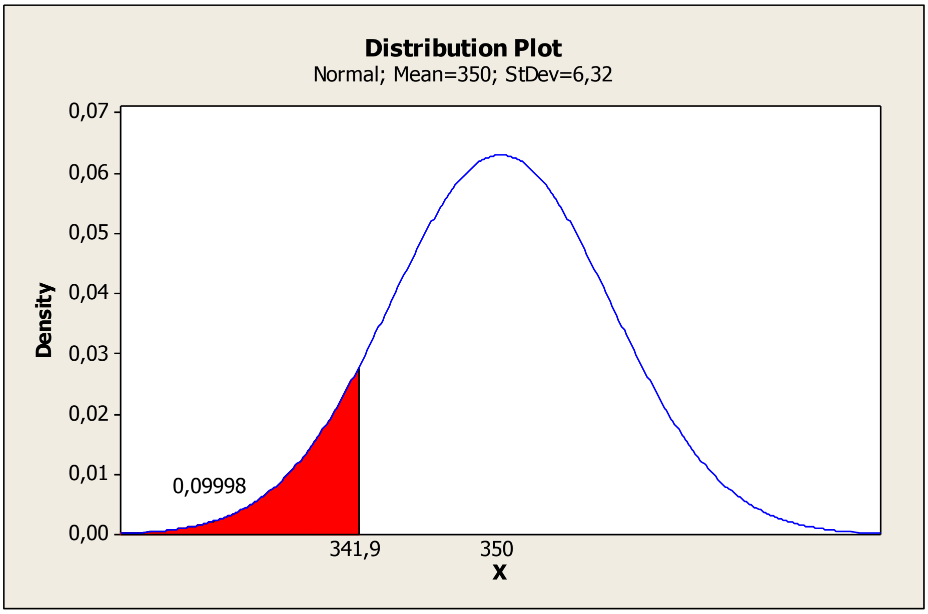
1. Tip hata 0.10 olduğu için Z dönüşümü ile

$$P(Z < -1.28) = 0.10$$

$$P\left(\frac{\bar{X}_0 - 350}{6.32} < -1.28\right) = 0.10$$

$$P(\bar{X}_0 < 341.9) = 0.10$$

elde edilir.

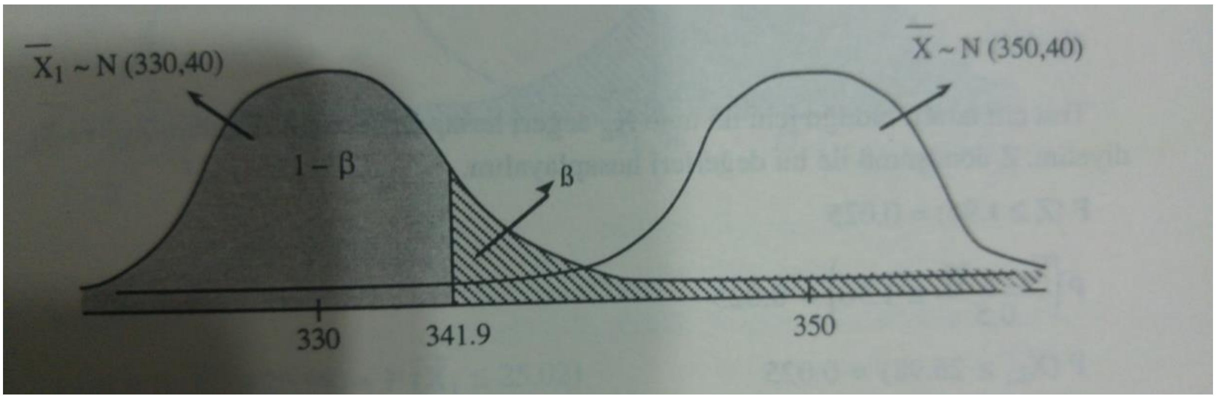


$\bar{X}_h = 325$ değeri ret bölgesinde düştüğü için H0 hipotezi reddedilir.

Bu durumda yığın ortalamasının her gerçek değeri için testin gücü hesaplanabilir.

$\mu_G = 330$ iken testin gücünü ve 2. tip hatayı hesaplayalım;

$\bar{X}_0 \sim N(350{,}40)$, $\bar{X}_1 \sim N(330, 40)$ dağılımları aşağıdaki şekil üzerinde gösterilmiştir.



$$1 - \beta = P(\bar{X}_1 > 341.9)$$

$$\beta = P(\bar{X}_0 < 341.9)$$

$$\alpha = P(\bar{X}_0 > 341.9)$$

$$1 - \alpha = P(\bar{X}_1 < 341.9)$$

Buradan testin gücü için;

$$1 - \beta = P\left(Z < \frac{341.9 - 330}{6.32}\right) = P(Z < 1.88)$$

$$1 - \beta = P(Z < 1.88)$$

$$1 - \beta = 0.9699$$

ve 2. tip hata olasılığı ise; $\beta = 0.0301$ olarak elde edilir.

2. BİR ANAKÜTLE PARAMETRELERİ İLE İLGİLİ HİPOTEZ TESTLERİ

Hipotez testleri parametrik ve parametrik olmayan hipotez testleri olmak üzere iki grupta incelenir.

i.) Parametrik Hipotez Testleri

- Gözlemler bağımsız olmalı. Bir birimin verisi başka biriminkini etkilememelidir.
- Gözlemler normal dağılımı gösteren bir anakütleden çekilmiş olmalıdır.
- Anakütle varyansları aynı olmalı (özel durumlarda varyansların oranı bilinmelidir).
- Veriler nicel ölçekli olmalıdır (Skort(likert tipi), Aralıklı, Oransal ölçekli).
- Değişken normal dağılım göstermelidir. Verilerin normal dağılım gösterdiği uygun Normality testleri ile (Shapiro- Wilk, Ryan- Joiner, Kolmogorov- Smirnow, Anderson- Darling vb.) test edilerek denetlenmelidir.
- Test tipine göre örnek birim sayısı (n)/ sayıları (ni) (ni=1,k) yeterli olmalıdır.
- Değişkenin toplum parametreleri bilinmelidir (μ, σ^2 ya da P, nPQ).
- Sayımla elde edilen Binom, Poisson dağılan değişkenlerin Normale yaklaşım koşullarını gerçeklemesi gerekir.

ii.) Parametrik Olmayan İstatistiksel Yöntemler

- Normal dağılım varsayımının ön koşul olarak ele alınmadığı durumlarda uygulanır.
- Hipotezler belirli bir dağılım parametresine dayalı olmaksızın ele alınırlar ve genellikle Medyan ve Ranklara dayalı olarak hipotezler test edilir.
- İsimsel, Sıralı ve yaklaşık aralıklı ölçekli Nitel verilerin analizinde yararlanılır.
- Normal dağılmayan Nicel verilerin analizinde yararlanılır.
- Birim sayısının yetersiz olduğu durumlarda uygulanır.
- Heterojen veri yapılarında uygulanır.
- Verilerin belirli bir dağılıma uygunluğunu, verilerin rastgeleliğini hedefleyen hipotezlerin test edilmesinde uygulanır.

Avantajları:

- Anakütlenin nasıl bir dağılım gösterdiğini bilmek gerekmez.
- Birkaç farklı anakütleden alınmış gözlemlerin bir araya getirilmesiyle oluşturulmuş örnekler parametrik olmayan yöntemlerle test edilebilir.
- Gözlem sayısı az olduğunda kullanılabilirler.
- Sınıflama ve sıralama ölçekli verilere uygulanabilirler.
- Uygulama ve öğrenme bakımından daha kolaydırlar.

Dezavantajları:

- Parametrik testlere göre daha düşük güçlüdürler.
- Aynı örnekleme uygulandığında farklı parametrik olmayan testlerden farklı sonuçlar elde edilebilir.

Parametrik yöntem varsayımları sağlanıyorsa, parametrik olmayan yöntemin kullanılması bir kısım verinin bilgi kaybına sebep olur.

2.1 Bir Anakütle Ortalamasının Hipotez Testi

Bu tür hipotezlerin testinin amacı, karşıt hipotezde ileri sürülen iddianın kabul edilip edilmeyeceğinin ortaya çıkartılmasıdır. Ancak karşıt hipotezi direk test etmek mümkün olmadığından, sıfır hipotezi test edilir ve elde edilen sonuç karşıt hipotez için genellenir.

Tek grup anakütlenin parametreleriyle ilgili hipotez testlerin varsayımları şunlardır:

i. Örneklemin alındığı anakütle normal dağılıma sahiptir.
ii. Örneklemdeki birimler eşit olasılıkla ve iadeli olarak seçilmiş veya anakütle sonsuz büyüklüktedir.

Bu testlerde ileri sürülebilecek karşıt hipotezlere şu şekilde örnek verebiliriz.

- ✓ Bir firmanın tereyağı paketlerinin ağırlığının 250 gr olması gerektiği halde, firma buna uymamaktadır.
- ✓ Günlük ortalama üretimi 1000 kg olan bir ilaç fabrikasında uygulanan yeni teknik üretimi artırmıştır.
- ✓ Turistik amaçla yurtdışına giden vatandaşlarımızın ortama konaklama süresi 20 günden azdır.

Bu örneklere göre sıfır ve karşıt hipotezlerimiz sırasıyla aşağıdaki gibi olacaktır.

H_0 : $\mu=\mu_0=250$ gr H_0 : $\mu=\mu_0=1000$ kg H_0:$\mu=\mu_0=20$ gün

H_1 : $\mu\neq\mu_0=250$ gr H_1 : $\mu>\mu_0=1000$ kg H_1 :$\mu<\mu_0=20$ gün

Anakütle (Popülâsyon) Varyansı (σ^2) Biliniyor:

Anakütle normal dağılışlı ve anakütle varyansı biliniyorsa ve $n\geq30$ ise, sıfır hipotezinin karşıt hipoteze karşı testi için Z test istatistiği kullanılır.

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Bulunan Z test istatistiği α anlamlılık seviyesine göre Z tablo değerleri ile karşılaştırılır. Karşıt hipotezin tek (α) veya çift ($\alpha/2$) taraflı olmasına göre karar verilir.

Tek taraflı : $Z<-Z_\alpha$ $Z>Z_\alpha$

Çift taraflı : $Z<-Z_{\alpha/2}$ $Z>Z_{\alpha/2}$

ise H_0 (sıfır) hipotezi reddedilir.

P değeri : İstatistik paket programlarında genellikle p olasılığı kullanılır. Bu olasılık H_0 doğru olduğunda, test istatistiğinin hesaplanan değerine eşit yada daha uç değerler alması olasılığıdır. Hesaplanan p değeri yanılma olasılığından (α) küçük ise H_0 reddedilir.

$p < \alpha$ ise H_0 hipotezi reddedilir,

$p \geq \alpha$ ise H_0 hipotezi kabul edilir.

p olasılığı Z test istatistiği için aşağıdaki biçimde hesaplanır. Ancak paket programlar bu olasılığı vermektedir.

$$p = \begin{cases} 1[1-\Phi(|Z|)] & ; H_1 : \mu \neq \mu_0 \\ 1-\Phi(Z) & ; H_1 : \mu > \mu_0 \\ \Phi(Z) & ; H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Tek ve çift taraflı test için bazı kritik Z tablo değerleri

Testin Cinsi	**Anlamlılık Düzeyi (α)**	
	%5	%1
Tek taraflı test	1.645	2.33
İki taraflı test	1.960	2.58

P değeri ekseriya, sıfır hipotezi doğru olduğunda gerçekten deneyde elde edilen kadar aşırı sonuç elde etme olasılığını tanımlar. Popülasyon ortalamalarının eşitliği testi yapıldığında P nin 0.05 den küçük veya büyük olması ile güven sınırlarının sıfır sayısını kapsamaması ile aynı anlama gelmektedir. α düzeyinde sıfır hipotezinin ret edilmesi, ortalama farklarının %100(1-α) lık güven aralığının sıfırı kapsamaması ile eşdeğerdir.

"Delilin yokluğu, hiçbir zaman yokluğun delili olamaz" bunu akıldan çıkarmamak gerekir. Bu nedenle bazı araştırıcılar, sıfır hipotezi kabul edildi deme yerine sıfır hipotezi ret edilemedi (delil yetersizliğinden) demeyi tercih ederler.

P değerinin yanında güven sınırlarının verilmesi, uygulamadaki önemliliğin vurgulanabilmesi için oldukça önemlidir. Böylece etkinin varlığı ile etkinin büyüklüğü hakkında bilgi verilmiş olur.

Örnek 2.1. Bir firmanın tereyağı paketlerinin ağırlığının ortalama 250 gr olması gerektiği halde, firmanın buna uymadığı iddia edilmektedir. Paketleme sırasında rasgele seçilen 100 paketin ortalama ağırlığı 245.5 gr olduğu tespit ediliyor. Anakütlenin standart sapması 15 gr olduğu biliniyor. %5 anlamlılık düzeyinde iddianın doğru olup olmadığını araştırınız?(Tablo=1,96)

Çözüm :

$H_0 : \mu=\mu_0=250$ gr　　　　Anlamlılık düzeyi=α=0.05

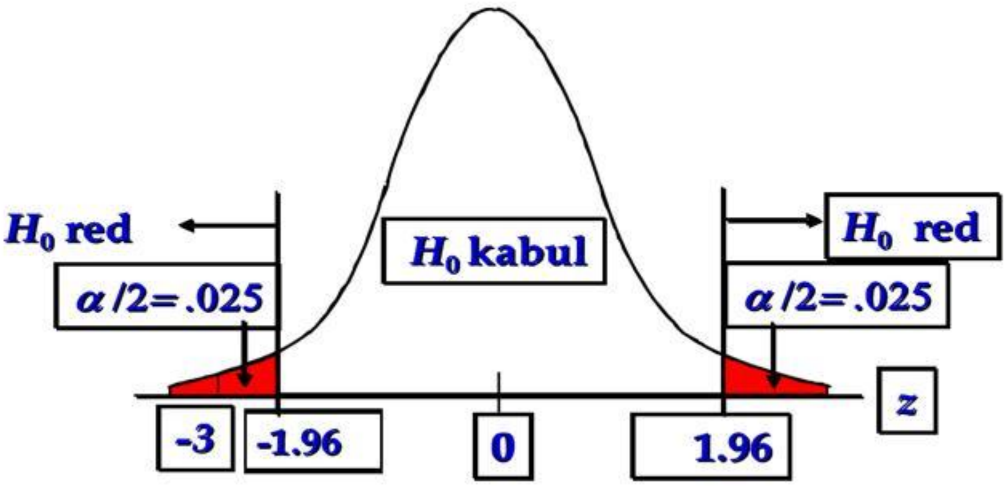
$H_1 : \mu\neq\mu_0=250$ gr　　　　$Z_{\alpha/2}=1.96$

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{245.5-250}{15/\sqrt{100}}=-3$$

$Z<-Z_{\alpha/2} \Rightarrow -3<-1.96$

H_0 reddedilir.

Firmanın tereyağı paketlerinin ağırlığı ortalama 250 gr olması gerektiği halde, firma buna uymamaktadır.



Örnek 2.2. Günlük ortalama üretimi 1000 kg. olan bir ilaç fabrikasında uygulanan yeni bir tekniğin üretimi artırdığı iddia edilmektedir. Üretim sırasında rastgele seçilen 64 günde yapılan üretim belirlendikten sonra bunların ortalaması 1018 kg olarak hesaplanmıştır. Anakütle standart sapması 120 kg olarak biliniyor. %5 anlamlılık seviyesine göre kararınız ne olur?(Tablo=1,64)

Çözüm:

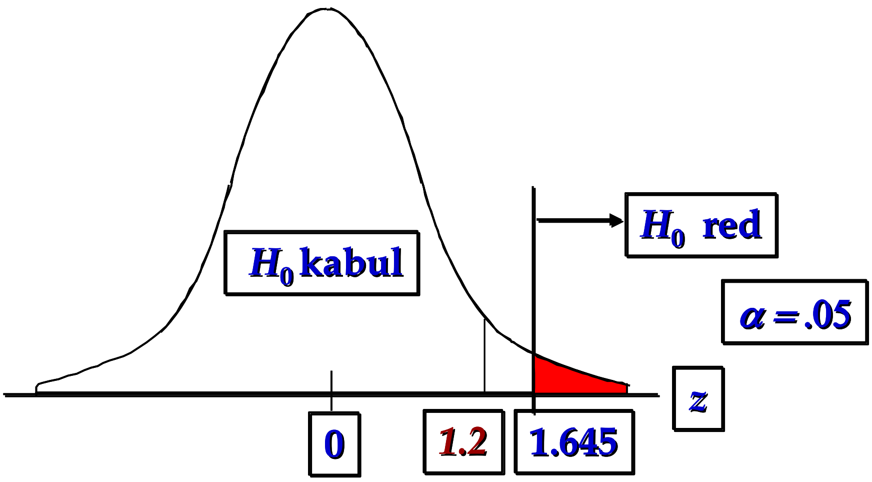
$H_0 : \mu=\mu_0=1000$ kg　　　　Anlamlılık düzeyi=α=0.05

$H_1 : \mu>\mu_0=1000$ kg　　　　$Z_{\alpha}=1.645$

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{1018-1000}{120/\sqrt{64}}=1.2$$

$Z<Z_{\alpha} \Rightarrow 1.2<1.645$ H_0 kabul edilir.

Yeni teknik üretimi artırmamıştır.



Anakütle (Popülâsyon) Varyansı (σ^2) Bilinmiyor:

Anakütle standart sapması bilinmiyorsa, örneklem standart sapması kullanılır. n>30 durumunda dağılım normale uyduğundan test istatistiği olarak yine Z testi kullanılır.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

Ancak n≤30 olduğunda ve anakütle varyansı bilinmediğinde t dağılımı kullanılır.

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

t istatistiği (n-1) serbestlik dereceli t dağılımına sahiptir. t dağılımı simetrik bir dağılımdır. Bu dağılımın şekli serbestlik derecesine bağlıdır. n>30 olduğunda dağılım normale yaklaşır.

Serbestlik derecesi (degrees of freedom) : Örnekle ilgili bir istatistiğin hesaplanmasında veya bir parametrenin tahmin edilmesinde, bağımsız birimlere ait sayının bilgisini ifade eden bir terimdir. Serbestlik derecesi modeldeki parametre sayısına karşılık gelmektedir. Ayrıca serbestlik derecesi verilere getirilen bazı kısıtlamalardan sonra, değişmekte serbest olan değerlerin sayısıdır.

Örnek 2.3. Çok geniş boyutlu çalışmalardan 2-14 yaş grubundaki ortalama kolesterol düzeyinin 175 mg%/mL den yüksek olduğu iddia ediliyor. Babaları kalp krizi geçirmiş olan 10 çocuğun ortalama kolesterol düzeyi 179.8 %mL ve standart sapması 30 %mL hesaplanmıştır. Buna göre babası kalp krizi geçiren bu çocukların ortalama kolesterol düzeyinin yüksek olup olmadığını kontrol ediniz (α=0.05). (Verilerin normal dağılım gösterdiği kabul ediliyor.)

Çözüm :

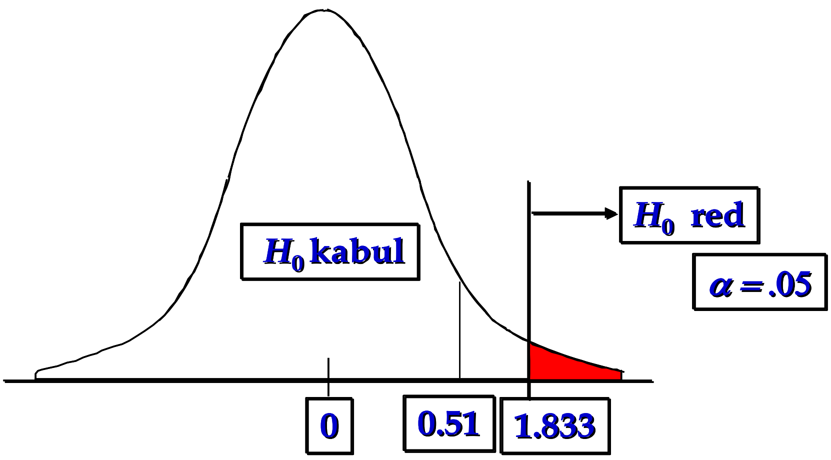
$H_0 : \mu=175$ Anlamlılık düzeyi=α=0.05

$H_1 : \mu>175$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{179.8 - 175}{30/\sqrt{10}} = 0.51$$,

$t_{(n-1),\alpha} = t_{9,0.05} = 1.833 > 0,51$ H_0 kabul edilir.

KARAR: Babası kalp krizi geçiren çocukların kan kolesterol düzeylerinin daha yüksek olduğu söylenemez.



2.2. Bir Anakütle Oranının Hipotez Testi

Geçmişte yapılan geniş gözlemlere veya deneylere göre saptanan bazı oranlar vardır. Yeni bir uygulamanın bu oran üzerinde değişiklik yapıp yapmadığı araştırılabilir. Bu gibi hallerde oran testi kullanılır.

Örneğin grip hastalığından bir hafta içinde iyileşme oranı %20 dir. Buna göre grip aşısı olmuş kişilerde bu oran değişmekte midir? Sorusu araştırılabilir. Belirli sayıda denek üzerinden elde edilen yeni oran bu bilinen oranla karşılaştırılır. Bunu için Z testi kullanılır. Bunun için p'nin ortalaması ve varyansı bilinmesi gerekir; E(p)=p, V(p)=pq/n alınarak bu test yapılır.

Bu testlerde ileri sürülebilecek karşıt hipotez için aşağıdaki biçimde örnekler verebiliriz:

- ✓ A bölümüne isteyerek giren öğrencilerin oranı %40'dan farklıdır.
- ✓ Ekmekleri gramajının üstünde satanların oranı %20'den fazladır.
- ✓ Belediye otobüsüne binenlerin %60'dan azının pasosu vardır.

$H_0 : \pi=\pi_0=0.40$ $\quad$ $H_0 : \pi=\pi_0=0.20$ $\quad$ $H_0: \pi=\pi_0=0.60$

$H_1 : \pi\neq\pi_0=0.40$ $\quad$ $H_1 : \pi>\pi_0=0.20$ $\quad$ $H_1 : \pi<\pi_0=0.60$

$$Z=\frac{p-\pi_0}{\sigma_p}=\frac{p-\pi_0}{\sqrt{\dfrac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$

P : Örneklem oranı $\quad \pi_0$: Anakütlenin bilinen oranı $\quad$ n:örnek hacmi

Örnek 2.4. A bölümüne isteyerek giren öğrencilerin oranının %40'dan farklı olduğu iddia edilmektedir. Bu bölümden rastgele seçilen 250 öğrenciden 110'unun bölüme isteyerek girdiği belirtilmiştir. %5 anlamlılık düzeyine göre iddianın doğruluğunu araştırınız? (Tablo=1,96)

Çözüm : $H_0 : \pi=\pi_0=0.40$ $\quad$ Anlamlılık düzeyi=α=0.05

$H_1 : \pi\neq\pi_0=0.40$ $\quad$ $Z_{\alpha/2}=1.96$

P=110/250=0.44

$$Z=\frac{0.44-0.40}{\sqrt{\dfrac{0.40(1-0.40)}{250}}}=1.29$$

$Z_{hesap}=1.29 < Z_{tablo}=1.96$ olduğundan H_0 reddedilemez(kabul edilir).

Karar: Bu bölüme isteyerek giren öğrencilerin oranı %40'dan farklı değildir.

Örnek 2.5. Sezaryenle doğum yapan hastalarda doğum sonrası komplikasyon çıkması olasılığı %20 olarak bilinmektedir. Yeni bir yöntem geliştiren bir hastane bu oranı düşürdüğünü iddia etmektedir. Bu iddiayı test için söz konusu hastanede sezaryen ameliyatı geçiren 80 hastadan 12 adedinin komplikasyon geçirdiği tespit edilmiştir. Buna göre bu hastanenin iddiasının doğru olup olmadığını 0.05 önem düzeyinde test ediniz? (Tablo=1,64)

Çözüm:

n=80 , r=12 , α=0.05

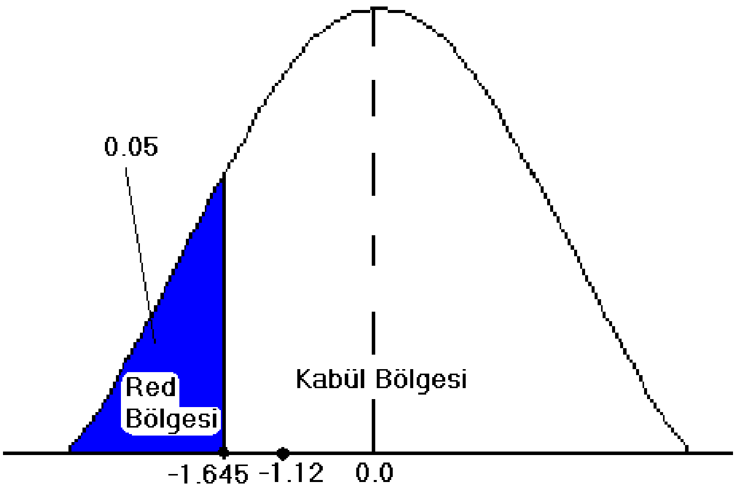
H_0: π=0.20 ; H_1: π<0.20

$$\hat{p} = \frac{r}{n} = \frac{12}{80} = 0.15$$

$$Z = \frac{(0.15-0.20)}{\sqrt{\frac{0.20*0.80}{80}}} = -1.12$$

-1.12>-1.645

Ho kabul edilir. Yani yeni yöntemdeki komplikasyon oranının azaldığı söylenemez.



ÖRNEK PROBLEMLER

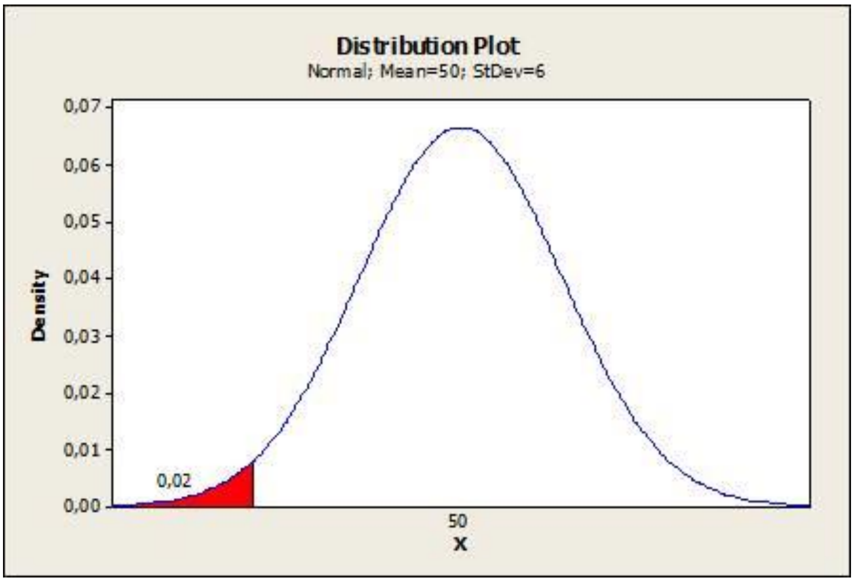
1. Bir firma tarafından üretilen bir ürünün ömrü 50 ay ortalama ve 6 ay standart sapmayla normal dağılım göstermektedir. Firma sahibi satışları artırmak için garanti süresi uygulamak istemektedir. Ancak garanti kapsamında değiştirilecek ürünün, toplam satışın %2'sinden fazla olmasını istememektedir. Garanti uygulanacak olan bu süreyi bulunuz?

ÇÖZÜM:

$$P(X < k) = 0{,}02 \qquad X \sim N(50{,}6^2)$$

$$P(Z < \frac{x-50}{6}) = 0{,}02 \quad , \; k = -2{,}06$$

$$\frac{x-50}{6} = -2{,}06 \Rightarrow x = 37{,}64\, ay$$



2. Bir kolejin öğrenci seçmek amacıyla geçmiş yıllarda yapmış olduğu sınav sonuçlar 812 puan ortalama ve 144 puan standart sapmayla normal dağıldığı bilinmektedir. Bu koleje girebilmek için sınav sonucunda ilk %10'a girilmesi gerekmektedir. Bir öğrencinin bu koleje girebilmek için en az kaç puan alması gerekmektedir?

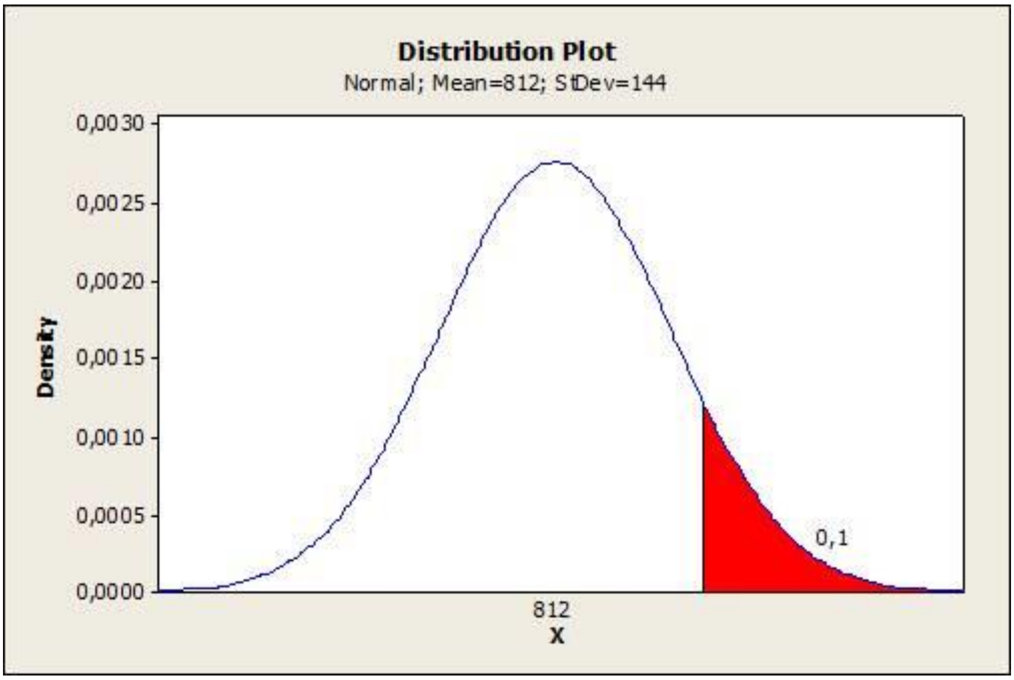
ÇÖZÜM:

$$P(X \geq k) = 0{,}10$$

$$X \sim N(812{,}144^2)$$

$$P(Z \geq \frac{x-812}{144}) = 0{,}10 \quad , \; k = 1{,}28$$

$$\frac{x-812}{144} = 1{,}28 \Rightarrow x = 996\; puan$$



3. Bir şehirde kişi başına aylık ortalama kültür harcaması 20 milyon TL den fazla olduğu iddia edilmektedir. Rastgele seçilen 7 kişilik bir örnek için elde edilen gözlem değerleri şöyle olsun:

x_i: 25, 20, 30, 22, 10, 0, 47 $\alpha = 0{,}05$ olmak üzere iddiayı p değerini kullanarak test ediniz.

ÇÖZÜM:

$\mathrm{H}_0: \mu = 20$
$\mathrm{H}_1: \mu > 20$

$$\bar{x} = \frac{1}{7}(25 + 20 + 30 + 22 + 10 + 0 + 47) = 22$$

$\underline{(x_i - \bar{x})^2}$

9

4

64 $S^2 = \frac{1330}{6} = 221{,}7$

0 $S_{\bar{x}}^2 = \frac{221{,}7}{7} = 31{,}67$

144 $S_{\bar{x}} = \sqrt{31{,}67} = 5{,}62$

484

$\underline{+625}$

1330

P değeri < α ise H_0 red edilir.

P değeri $\geq \alpha$ ise H_0 red edilemez.

P değeri =P $(\bar{x} > 22)$

$$= P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{S_{\bar{x}}} > \frac{22-20}{5,62}\right)$$

$$= P\left(t_{n-1} > \frac{2}{5,62}\right)$$

$$= P(t_{n-1} > 0,3558) = P(t_6 > 0,3558)$$

t tablosuna bakıldığında 0,3558 ait olan değerin 0,80 ile 0,70 arasında kaldığı görülür. P değerini yaklaşık olarak 0, 75 diyebiliriz. O halde,
P değeri=0,75 $> \alpha = 0,05$ dir ve H_0 reddedilemez.

Yorum: $\alpha = 0,05$ olmak üzere adı geçen şehirdeki kişilerin kültür harcamalarının 20 milyon TL den fazla olduğu iddiası istatistiksel olarak desteklenmemiştir.

4. Yeni bir katkı maddesi kullanılarak üretim yapılan ürünlerin ortalama dayanma süresinin 5 yıldan farklı olduğu iddia edilmektedir. Adı geçen katkı maddesi kullanılarak üretim yapılan ürünlerden 41 tanesinin bulunduğu rastgele bir örnek seçilerek $\bar{x} = 5,9$ yıl ve S=1,74 olarak bulunmuş olsun. $\alpha = 0,05$ olduğuna göre testin sonucunu P değerini kullanarak bulunuz.

ÇÖZÜM:

$H_0: \mu = 5$

$H_1: \mu \neq 5$

$\bar{x} = 5,9$ S=1,74 $S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{1.74}{\sqrt{41}} = 0,2717$

2.P değeri $< \alpha$ ise H_0 red edilir.

2.P değeri $\geq \alpha$ ise H_0 red edilemez.

P değeri =P $(\bar{x} > 5,9)$

$$= P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{S_{\bar{x}}} > \frac{5,9-5}{0,2717}\right)$$

$$= P(t_{40} > 3,3124)$$

t tablosuna baktığımızda P değerinin 0,001 den daha küçük olduğunu görüyoruz. $\frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025$ olmak üzere P değeri$< 0,001 < 0,0025$ olduğundan H_0 ret edilir.

Yorum: $\alpha = 0,05$ olmak üzere adı geçen katkı maddesini kullanarak üretilen ürünlerin ortalama dayanma süresinin % yıldan farklı olduğu iddiası istatistiksel olarak desteklenmiştir.

5. Ameliyattan sonra iyileşene kadar geçen süreyi 20 günün altına indirdiği iddia edilen 9 hastaya ilişkin iyileşme süreleri şöyle olsun.
x_i: 15, 9, 12, 10, 12, 5, 19, 10, 14 $\alpha = 0{,}01$ olmak üzere iddianın doğruluğu hakkında p değerini kullanarak ne söylenebilir?

ÇÖZÜM:

$\mathrm{H_0}: \mu = 20$

$\mathrm{H_1}: \mu < 20$

$$\overline{x} = \frac{1}{9}(15 + 9 + 12 + 10 + 12 + 5 + 19 + 10 + 14) = 11{,}77$$

$\underline{(x_i - \overline{x})^2}$

0,43

7,67

0,05

3,13 $\qquad S^2 = [1/(9-1)].\,127{,}53 = 15{,}94$

0,05 $\qquad S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{15{,}94}{9}} = 1{,}33$

45,83

52,27

3,13

4,97

P değeri $< \alpha$ ise $\mathrm{H_0}$ red edilir.

P değeri $\geq \alpha$ ise $\mathrm{H_0}$ red edilemez.

P değeri =P $(\bar{x} < 11{,}77)$

$$= P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{S_{\bar{x}}} < \frac{11{,}77-20}{1{,}33}\right)$$

$$= P(t_8 < -18{,}67) = P(t_8 > 18{,}67)$$

t tablosuna baktığımızda P değerinin 0,001 den küçük olduğunu görürüz.

P değeri <0,001 $< \alpha = 0{,}01$ olduğundan $\mathrm{H_0}$ ret edilir.

Yorum: $\alpha = 0{,}01$ olmak üzere ameliyattan sonra iyileşmeye kadar geçen süreyi 20 günün altına indirdiği şeklindeki iddia istatistiksel olarak desteklenmiştir.

6. Bir şehirdeki belli yaş grubundaki çocukların %10 undan fazlasının beslenme sorunu olduğu öne sürülmektedir. Bu şehirdeki belli yaş grubunda olan çocukların rastgele seçilen 400 ünden 50 tanesinin beslenme problemi olduğu tespit edilmiştir. $\alpha = 0{,}10$ olmak üzere kararınız p değeri kullanarak ne olur?

ÇÖZÜM:

$\mathrm{H}_0\text{: } \pi = 0{,}10$

$\mathrm{H}_1\text{: } \pi_0 > 0{,}10$

$$P = \frac{50}{400} = 0{,}125$$

$$\sigma_p^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n} = \frac{(1{,}10)(0{,}90)}{400} = 0{,}000225$$

$$\sigma_p = \sqrt{0{,}000225} = 0{,}015$$

P değeri $<\alpha$ ise H_0 red edilir.

P değeri $\geq \alpha$ ise H_0 red edilemez.

P değeri =P $(P > 0{,}125)$

$$= P\left(\frac{p-\pi}{\sigma_p} > \frac{0{,}125-0{,}10}{0{,}015}\right)$$

$$= P(Z > 1{,}66) = 1 - P(Z < 1{,}66) = 1 - 0{,}9515 = 0{,}0485$$

P değeri= 0,0485 $< \alpha = 0{,}10$ olduğu için H_0 ret edilir.

Yorum: $\alpha = 0{,}10$ anlamlılık düzeyinde olmak üzere bir şehirdeki belli yaş grubundaki çocukların %10 undan fazlasının beslenme sorunu olduğuna yönelik iddia istatistiksel olarak desteklenmiştir.

7. Bir şehirde satılan ekmeklerde belediyenin gramajdan farklı olanların oranının %20 den farklı olduğu iddia edilmektedir. Rastgele seçilen 100 ekmekten 24 tanesinin belirtilen gramajdan farklı olduğu belirlenmiştir. $\alpha = 0{,}05$ olmak üzere kararınız P değerini kullanarak ne olur?

ÇÖZÜM:

$\mathrm{H}_0\text{: } \pi = 0{,}20$

$\mathrm{H}_1\text{: } \pi_0 \neq 0{,}20$

$$P = \frac{24}{100} = 0{,}24$$

$$\sigma_p^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n} = \frac{(0{,}20)(0{,}80)}{100} = 0{,}0016$$

$\sigma_p = \sqrt{0{,}0016} = 0{,}04$

P değeri $< \alpha$ ise $\mathrm{H_0}$ red edilir.

P değeri $\geq\ \alpha$ ise $\mathrm{H_0}$ red edilemez.

P değeri =P $(P < 0{,}24)$

$$= P\left(\frac{p-\pi}{\sigma_p} < \frac{0{,}24-0{,}20}{0{,}04}\right)$$

$$= P(Z < 1) = 0{,}8413$$

P değeri= 0,8413 $> \alpha = 0{,}05$ olduğu için $\mathrm{H_0}$ ret edilemez.

Yorum: $\alpha = 0{,}05$ olmak üzere satılan ekmeklerde gramaj farkı oranının %20 den farklı olduğu iddiası istatistiksel olarak desteklenememiştir.

8. Bir ilaç firmasının piyasaya sürdüğü ilacın etiketinde hastaların %80 ninde etkili olduğu yazılmaktadır. Buna karşılık hekimler ilacın %80 den daha azında etkili olduğunu öne sürmektedir. Söz konusu ilaç tedavi amaçlı olarak 200 hasta üzerinde uygulanmış ve bunlardan 120 sinde etkili olduğu görülmüştür. $\alpha = 0{,}01$ olmak üzere hekimlerin iddiasını P değerini kullanarak test ediniz.

ÇÖZÜM:

$\mathrm{H_0}: \pi = 0{,}80$

$\mathrm{H_1}: \pi_0 < 0{,}80$

$$P = \frac{120}{200} = 0{,}6$$

$$\sigma_p^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n} = \frac{(0{,}80)(0{,}20)}{200} = 0{,}0008$$

$\sigma_p = \sqrt{0{,}0008} = 0{,}028$

P değeri $< \alpha$ ise $\mathrm{H_0}$ red edilir.

P değeri $\geq\ \alpha$ ise $\mathrm{H_0}$ red edilemez.

P değeri =P $(P < 0{,}6)$

$$= P\left(\frac{p-\pi}{\sigma_p} < \frac{0{,}6-0{,}8}{0{,}028}\right)$$

$$= P(Z < -7{,}14) = P(Z > 7{,}14) \cong 0{,}0000$$

P değeri= $0{,}0000 < \alpha = 0{,}01$ olduğu için $\mathrm{H_0}$ ret edilir.

Yorum: $\alpha = 0{,}01$ olmak üzere hastaların %80 ninden azında etkili olduğu yolundaki iddia istatistiksel olarak desteklenmiştir.

9. Bir başka ilaç firmasının ürettiği ilacın iyileşme oranının bilindiği gibi %90 olmadığı öne sürülmektedir. Rastgele seçilen 150 hastanın 110 unda ilacın etkili olduğu tespit edilmiştir. $\alpha = 0{,}01$ olmak üzere sonucun ne olduğunu P değerini kullanarak test ediniz.

ÇÖZÜM:

$\mathrm{H_0}: \pi = 0{,}90$

$\mathrm{H_1}: \pi_0 \neq 0{,}90$

$$P = \frac{110}{150} = 0{,}73$$

$$\sigma_p^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n} = \frac{(0{,}90)(0{,}10)}{150} = 0{,}0006$$

$$\sigma_p = \sqrt{0{,}0006} = 0{,}024$$

2.P değeri $< \alpha$ ise $\mathrm{H_0}$ red edilir.

2.P değeri $\geq \alpha$ ise $\mathrm{H_0}$ red edilemez.

P değeri =P $(P < 0{,}73)$

$$= P\left(\frac{p-\pi}{\sigma_p} < \frac{0{,}73-0{,}90}{0{,}024}\right)$$

$$= P(Z < -7{,}08) = 1 - P(Z > 7{,}08) = 1 - 0{,}9999 \cong 0{,}0001$$

2.P değeri= 2. $0{,}0001 = 0{,}0002 < \alpha = 0{,}01$ olduğundan $\mathrm{H_0}$ ret edilir.

Yorum: $\alpha = 0{,}001$ olmak üzere ilacın iyileşme oranının bilindiği gibi %90 olmadığı yolundaki iddia istatistiksel olarak desteklenmiştir.

2.3. Bir Anakütle Varyansının Hipotez Testi

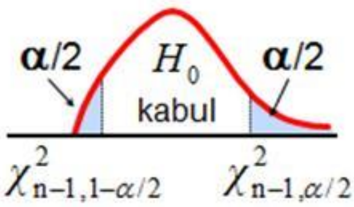
Şimdiye kadar μ için hipotez testleri kuruldu. Şimdi ise bir anakütle varyansının belirli bir değere eşit olup olmadığını veya büyük/küçük olup olmadığı test edilecektir yani hipotezi σ^2 üzerine kuracağız.

Anakütle varyansına ilişkin testlerde karşılaşılabilecek muhtemel hipotez çiftleri aşağıdadır:

Çift yönlü hipotez testi

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$



Test istatistiği,

$\chi_h^2 = \chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2}$ olmak üzerek üzere,

Eğer, $\chi_{n-1}^2 > \chi_{n-1,\alpha/2}^2$ veya $\chi_{n-1}^2 < \chi_{n-1,1-\alpha/2}^2$ ise H_0 reddedilir.

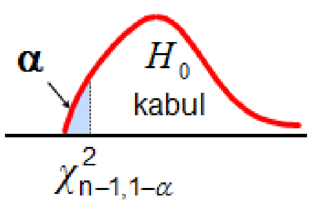
Çift yönlü hipotez testinde n-1 serbestlik derecesi ile $\alpha/2$ ve $1-\alpha/2$ önem seviyesi sütunlarının tarif ettiği iki değer kritik χ^2 değerleridir.

Test istatistiği bu değerler arasına düştüğünde H_0 hipotezi kabul edilir.

Tek yönlü hipotez testleri

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$



Eğer, $\chi^2_{n-1} < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$ ise H_0 reddedilir.

Ki-kare cetvelinden n-1 serbestlik derecesi ve $1-\alpha$ önem seviyesine göre kritik değer belirlenir. Test istatistiği kritik ki-kare değerinden küçük ise H_0 hipotezi reddedilir.

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

Eğer, $\chi^2_{n-1} > \chi^2_{n-1,\alpha}$ ise H_0 reddedilir. n-1 serbestlik derecesi ve α önem seviyesine göre ki kare cetvelinden kritik ki kare değeri bulunur. Test istatistiği bu değerden büyük olursa H_0 hipotezi reddedilir.

Örnek 2.6. Bir şirket eski tip makine kullanarak 0,00042 varyansla 1 cm çaplı cıvata üretmektedir. Şirket 25 tane yeni makineyi satın almak amacıyla denediğinde aynı yip cıvatalar için 0,00028 varyansı buluyor. $\alpha = 0,05$ alarak yeni tip makinelerle aynı tip cıvatanın daha küçük varyansla üretilebildiğini söyleyebilirsek yeni makine satın alınacaktır. Bu örneklemle ne karar verilebilir?

Çözüm:

Yeni makinelerle üretilen cıvataların kitlesi için aşağıdaki hipotezler kurulur.

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,00042$

$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 = 0,00042$

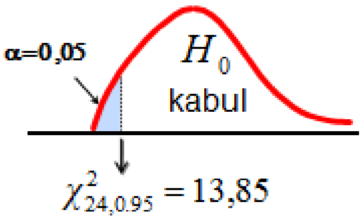
$\alpha = 0,05$ olmak üzere,

Test istatistiği;

$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2}$ dir. Varyans 0,00042 ise χ^2_{n-1} istatistiği χ^2 dağılımına sahiptir. Şöyle ki;

- Cıvataların örneklemi rastgele seçilecek
- Yeni makinelerle üretilen cıvataların çaplarının kitlesi normal dağılıma sahip olacaktır. n=25 serbestlik derecesi n-1= 25-1=24 tür.

$\chi^2_h = \frac{24.(0,00028)}{0,00042} = 16$ olarak bulunur.



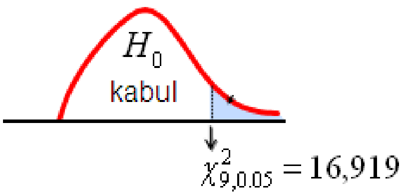
$\chi^2_h > \chi^2_{0,95}$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilemez. O halde eski tip makineler kullanılmaya devam edilecektir.

Örnek 2.7. Araba akümülatörlerinin ürettiği bir fabrikanın müdürü, akümülatörlerin ömrünün standart sapmasının 0,9 yıl olduğunu iddia ediyor. Üretilen akümülatörler arasından rastgele seçilen 10 akümülatör için 10 standart sapma 1.2 yıl bulunmuşsa $\alpha = 0{,}05$ anlam düzeyinde $ó > 0{,}9$ yıl olduğu söylenebilir mi?

Çözüm:

$H_0: \sigma^2 = 0{,}81$

$H_1: \sigma^2 > 0{,}81$



$\alpha = 0{,}05$, n=10 s.d.=n-1=9

Test istatistiği;

$\chi^2_{n-1} = \chi^2_h = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} = \frac{9.(1{,}2)^2}{(0{,}9)^2} = 16$ $\qquad \chi^2_t = \chi^2_{9,0.05} = 16{,}919$

$\chi^2_t > \chi^2_h$ olduğundan H_0 reddedilemez. Standart sapmanın 0,9 dan büyük olduğu söylenemez.

Problemler

1. Bir ülkede yaşayan ailelerin aylık ortalama gelirlerine ilişkin varyansın 400 den büyük olduğu iddia ediliyor. Rastgele seçilen 9 birimlik bir örneğe ilişkin ailelerin aylık ortalama gelirleri şöyle belirlenmiş olsun:

x_i: 100, 60, 40, 40, 30, 30, 50, 70, 120

$\alpha = 0{,}05$ olmak üzere iddianın doğruluğu hakkında ne söylenebilir?

Çözüm:

$\mathrm{H}_0: \sigma^2 = 400$

$\mathrm{H}_1: \sigma^2 > 400$

$\alpha = 0{,}05$, n=9 s.d.=n-1=8

$$\overline{x} = \frac{1}{9}(100 + 60 + 40 + 40 + 30 + 30 + 50 + 70 + 120) = 60$$

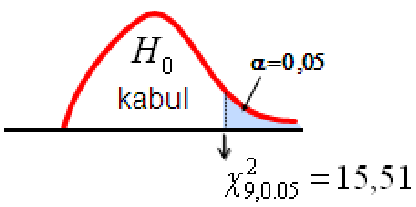
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \overline{x})^2$$

$$= \frac{1}{8}(1600 + 0 + 400 + 400 + 900 + 900 + 100 + 100 + 3600)$$

$$= 1000$$

$\chi_t^2 = \chi_{8,0.05}^2 = 15{,}51$ $\chi_h^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} = \frac{(9-1)100}{400}$

$\chi_h^2 > \chi_t^2$ olduğundan H_0 reddedilir.



Yorum: $\alpha = 0{,}05$ anlamlılık düzeyinde ülkede yaşayan ailelerin gelirlerine ilişkin varyansın 400 den fazla olduğuna ilişkin iddia istatistiksel olarak desteklenmiştir.

2. Yeni bir katkı maddesi ile üretimi yapılan ürünün dayanma süresine ilişkin varyansın 225 den küçük olduğu iddia edilmektedir. Bunu araştırmak için söz konusu ürünlerden rastgele seçilen 6 birimlik bir örneğe ilişkin gözlem değerleri şöyle olsun.

x_i: 35, 40, 45, 65, 60, 25

$\alpha = 0{,}05$ olmak üzere iddianın doğruluğu hakkında ne söylenebilir?

Çözüm:

$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = 225$

$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 < 225$

$\alpha = 0{,}05$, n=6 s.d.=n-1=5

$\overline{x} = \frac{1}{6}(35 + 40 + 45 + 65 + 60 + 25) = 45$

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \overline{x})^2$

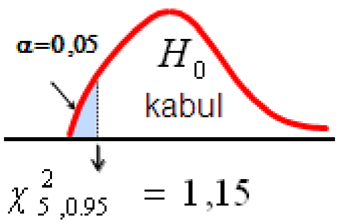
$= \frac{1}{5}(100 + 25 + 25 + 400 + 225 + 400)$

$= 230$

$\chi^2_t = \chi^2_{5,0.95} = 1{,}15$

$\chi^2_h = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} = \frac{(6-1)230}{225} = 5{,}11$

$\chi^2_h > \chi^2_t$ olduğundan H_0 red edilemez.



Yorum: $\alpha = 0{,}05$ olmak üzere üretimi yapılan mamüllerin dayanma sürelerine ilişkin varyansın 225 den daha küçük olduğu iddiası istatistiksel olarak desteklenememiştir.

3. Ameliyat geçiren hastaların iyileşme sürelerine ilişkin varyansın 100 den farklı olduğu iddia edilmektedir. Buna göre adı geçen ameliyatı olan 8 hastaya ilişkin iyileşme sürelerine ilişkin elde edilen örnek varyansı 12.857 olarak bulunmuştur. Anlamlılık düzeyi %10 olmak üzere iddianın doğruluğu hakkında ne söylenebilir?,

Çözüm:

$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = 100$

$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 \neq 100$

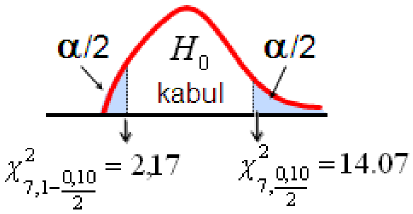
$\alpha = 0{,}10$, n=8 s.d.=n-1=7

$\chi^2_t = \chi^2_{7,\frac{0.10}{2}} = 14{,}07$

$\chi^2_t = \chi^2_{7.1-\frac{0.10}{2}} = 2{,}17$

$$\chi^2_h = \frac{(8-1)12{,}857}{100} = 0{,}90$$

$\chi^2_h = 0{,}90 < \chi^2_{7.1-\frac{0.10}{2}} = 14{,}07$ olduğundan $\mathrm{H_0}$ $\mathrm{reddedilir.}$



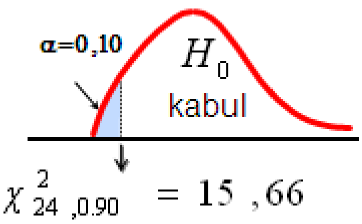
Yorum: $\alpha = 0{,}10$ olmak üzere hastaların iyileşme sürelerine ilişkin varyansın 100 den farklı olduğu iddiası istatistiksel olarak desteklenmiştir.

4. Varyansı 625 olarak tahmin edilen 25 çaplı bir örneğin $\alpha = 0{,}10$ olduğu durumda
$\mathrm{H_0}: \sigma^2 = 750$ hipotezini $\mathrm{H_1}: \sigma^2 < 750$ hipotezine karşı test ediniz.
Çözüm:

$$\chi^2_h = \frac{(25-1)625}{750} = 20$$

$\chi^2_t = \chi^2_{24,1-0{,}10} = 15{,}66$

$\chi^2_h > \chi^2_t$ olduğundan $\mathrm{H_0}$ red edilemez.



Yorum: $\alpha = 0{,}10$ olmak üzere varyansın 750 den küçük olduğu iddiası istatistiksel olarak desteklenememiştir.

3. İKİ ANAKÜTLE PARAMETRELERİ İLE İLGİLİ HİPOTEZ TESTLERİ

Bu testlerin amacı karşıt hipotezde ileri sürülen iddianın kabul edilip edilmeyeceğinin ortaya çıkartılmasıdır. Ancak karşıt hipotezi test etmek mümkün olmadığından, önce sıfır hipotezi test edilir ve bu sonuç karşıt hipotez için genellenir.

İki anakütlenin parametreleriyle ilgili hipotez testinin varsayımları:

- ✓ Örneklemlerin alındığı anakütle normal dağılışlıdır.
- ✓ Örneklemlerdeki birimler iadeli olarak ve eşit olasılıkla seçilmiş veya anakütleler sonsuz büyüktür.
- ✓ İki anakütledeki örneklem seçimi birbirinden bağımsızdır.

3.1. Bağımsız Örnekler ile Ortalama Farkına İlişkin Hipotez Testi

İki ortalama arasındaki farkın testi yapılırken, kullanılacak test istatistikleri anakütle varyansının bilinmesi ve örnek büyüklüğü dikkate alınarak aşağıdaki şekilde bir sınıflama yapılabilir. Gözlemler Normal dağılış gösteriyorsa ve

1) Popülasyon (anakütle) varyansları (σ_1^2, σ_2^2) biliniyor veya popülasyon varyansları bilinmiyor ancak örnekler büyükse (n $\geq$ 30)

2) Popülâsyon varyansları bilinmiyor fakat eşit kabul edilebiliyorsa ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$),

3) Popülâsyon varyansları bilinmiyor fakat eşit kabul edilemiyorsa ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$),

4) Gruplar bağımlı ise yani eşli gözlemler varsa,

farklı her durum için uygun test istatistikleri kullanılarak ilgili testler yapılabilir.

i) Anakütle varyansları (σ_1^2 ve σ_2^2) biliniyor ve n_1>30 , n_2>30 (Z-testi)

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$	H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$	H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$	H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$	H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad ,$$

$|Z| > Z_{tablo}$ ise H_0 reddedilir.

ii) Anakütle varyansları bilinmiyor ancak eşit (homojen) olduğu kabul ediliyor.

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ve $n_1 \leq 30$, $n_2 \leq 30$ (t-testi)

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$	H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$	H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$	H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$	H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s.\sqrt{(1/n_1) + (1/n_2)}} \quad , \quad s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Bulunan t_h hesap değeri t_{tablo} değeri mukayese edilir. $\mathbf{t_{\alpha,(n1+n2-2)} < t}$ ise H_0 reddedilir.

iii) Anakütle varyansları bilinmiyor ancak farklı (heterojen) olduğu biliniyor.

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ve $n_1 \leq 30$, $n_2 \leq 30$ (t-testi)

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$	H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$	H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$	H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$	H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Bulunan t_h hesap değeri t_{tablo} değeri mukayese edilir. $t_{tablo} < t_h$ ise H_0 reddedilir. Serbestlik derecesi aşağıdaki formülle bulunur.

$$sd = \frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Örnek 3.1. Bulaşık deterjanını plastik kaplara doldurmak için iki makine kullanılıyor. Birinci makineden $n_1=10$ plastik kap, ikinci makineden $n_2=12$ plastik kap seçiliyor. Bu kaplar incelendiğinde birinci makine ortalama 30.87 birim sıvı, ikinci makine ortalama 30.68 birim sıvı doldurmuştur. Varyansları ise sırasıyla 0.0225 ve 0.0324 bulunmuştur.

a) Varyansları homojen ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) kabul ederek, %95 güven düzeyinde (%5 anlamlılık düzeyinde) birinci makinenin daha fazla sıvı doldurduğu söylenebilir mi? t-tablo=1,725

b) Varyansları heterojen ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) kabul ederek, %95 güven düzeyinde birinci makinenin daha fazla sıvı doldurduğu söylenebilir mi? t-tablo=1,717

Çözüm :

$\overline{X}_1 = 30.87$	$s_1^2 = 0.0225$	$n_1 = 10$	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$\overline{X}_2 = 30.68$	$s_2^2 = 0.0324$	$n_2 = 12$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

a) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ise

$$s = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(10-1)0.0225 + (12-1)0.0324}{10+12-2}} = 0.167$$

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s * \sqrt{(1/n_1) + (1/n_2)}} = \frac{(30.87 - 30.68) - 0}{0.167 * \sqrt{(1/10) + (1/12)}} = 2.657$$

$t_{\alpha,(n1+n2-2)} = t_{005,(10+12-2)} = t_{0.05,20} = 1.725 < t_h = 2.657$ olduğundan H_0 reddedilir.

Karar: İki makineden birinci makinenin daha fazla sıvı doldurduğu %95 güvenilirlikle söylenebilir.

b) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ise

$$sd = \frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left[\frac{0,025}{10} + \frac{0,0324}{12}\right]^2}{\frac{\left(\frac{0,025}{10}\right)^2}{10-1} + \frac{\left(\frac{0,0324}{12}\right)^2}{12-1}} = 22$$

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(30.87 - 30.68)}{\sqrt{\frac{0.0225}{10} + \frac{0.0324}{12}}} = 2.699$$

$t_{\alpha,v} = t_{0.05,\ 22.02} = 1.717 < t_h = 2.699$ olduğundan H_0 reddedilir.

Karar : $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ olduğunda birinci makinenin daha etkin olduğu söylenebilir.

Örnek 3.2. İki farklı bölgede rastgele seçilen 6 yerdeki arsa fiyatları aşağıdaki gibi elde dilmiştir. Bu iki bölgedeki ortalama arsa fiyatları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık var mıdır?

A Bölgesi (x1000 TL):30   45   55   60   70   75

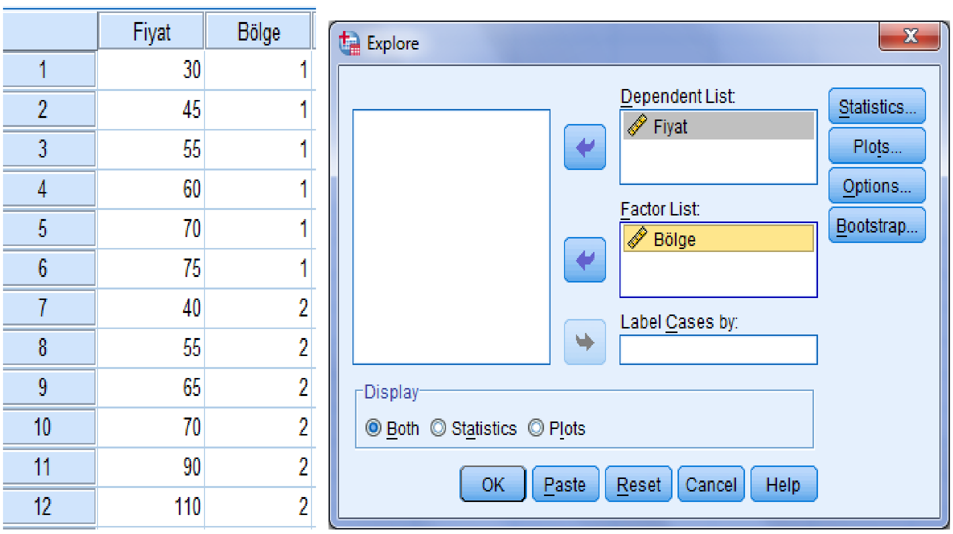
B Bölgesi (x1000 TL):40   55   65   70   90   110

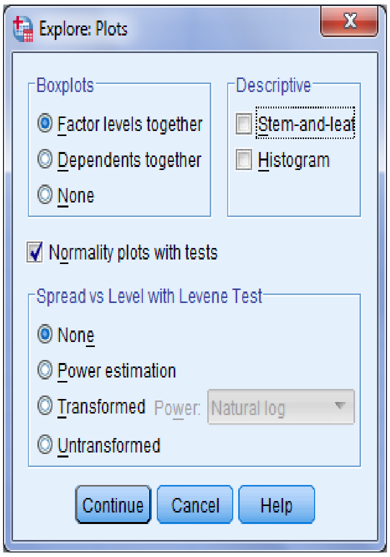
$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \qquad veya \qquad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \qquad\qquad\qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

$$\alpha = 0,05 \quad , \quad n_1 = 6 \quad , \quad n_2 = 6$$

Not: İstatistik paket programlarında tablo değeri yerine p (significance) olasılık değeri kullanılarak hipotezler test edilir. P<0.05 ise yokluk hipotezi ret edilir.

<u>SPSS ÇÖZÜM:</u>





Tests of Normality

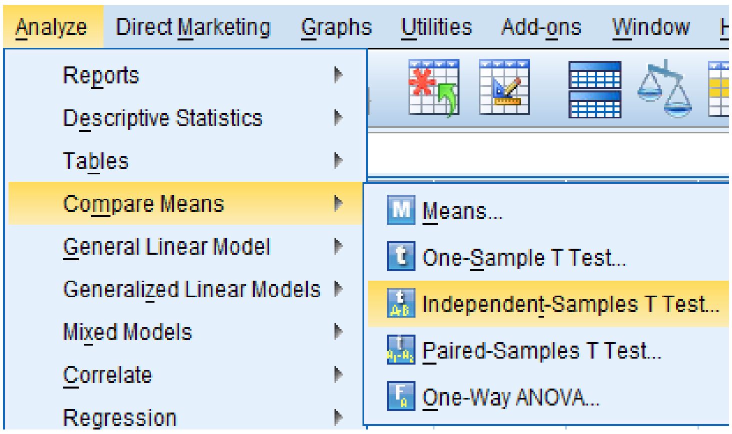
	Bölge	Kolmogorov-Smirnov[a] Statistic	df	Sig.	Shapiro-Wilk Statistic	df	Sig.
Fiyat	A	,147	6	,200*	,966	6	,866
	B	,193	6	,200*	,975	6	,925

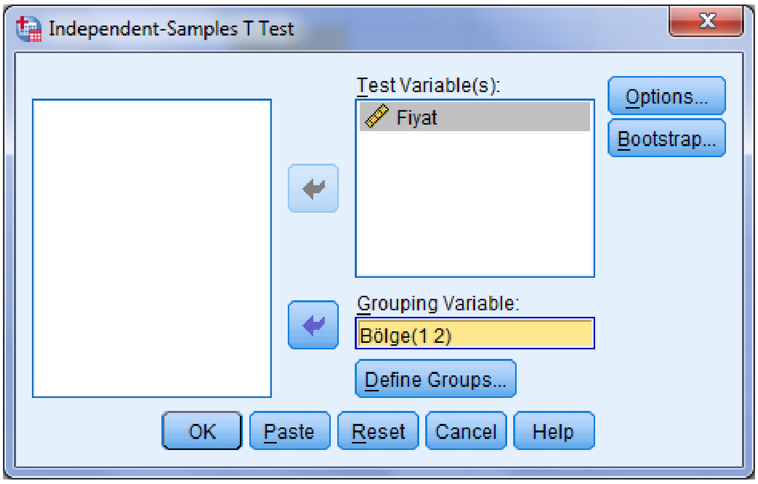
*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

P1=0,866>0,05 P2=0,925>0,05

Veriler normal dağılışlıdır.





Group Statistics

	Bölge	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Fiyat	A	6	55,83	16,558	6,760
	B	6	71,67	25,033	10,220

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means					95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Fiyat	Equal variances assumed	,859	,376	-1,292	10	,225	-15,833	12,253	-43,135	11,468
	Equal variances not assumed			-1,292	8,672	,230	-15,833	12,253	-43,712	12,046

Homojenlik Testi : p=0.376>0.05 varyanslar homojendir.

Independent t-test: p=0.225>0.05 H_0 red edilemez. Ortalama arsa fiyatları arasında anlamlı bir farklılık yoktur.

3.2. Bağımlı (Eşli Gözlemler) Örnekler ile İki Ortalama Farkına İlişkin Hipotez Testi

Aynı fert üzerinde farklı zamanlarda ölçümler alındığında ve bunların karşılaştırılması söz konusu olduğu durumlarda bağımlı (eşli) grup ortaya çıkar.

Eşleştirilmiş fertlerle yapılan testlerde kullanılan test istatistiği daha önceki grup karşılaştırmalarında kullanılanlardan daha farklıdır. Çünkü grup karşılaştırmalarında X_1 ile X_2 değişkenlerinin birbirinden bağımsız olduğu varsayılmaktaydı. Eşleştirilmiş gözlemlerde ise X_1 ve X_2 ölçümleri aynı birey üzerinde veya çok benzer bireyler üzerinden yapıldığı için bağımlı olacaktır. Yani $n_1 = n_2 = n$ (gözlem çifti sayısı) olacaktır.

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \qquad S^2_d = \frac{\sum_{i=1}^{n} d^2_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2}{n}}{n-1} \qquad t = \frac{\bar{d} - \delta}{\sqrt{\frac{s_d^2}{n}}}$$

H_0: $\delta = 0$ ve H_1: $\delta \neq 0$

Örnek 3.3. 22 hastada ameliyattan önceki ve sonraki şeker değerleri aşağıda verilmiştir. Buna göre ameliyat şeker değeri düşürmüş müdür olup olmadığını %95 güven düzeyinde araştırınız (Veriler normal dağılışlı olduğu varsayılıyor.)

t-tablo=1.721

$H_0: \delta=0$ veya $\mu_2-\mu_1=0$

$H_1: \delta<0$ veya $\mu_2-\mu_1<0$

Önce	Sonra	Fark-dj	Önce	Sonra	Fark-dj	Önce	Sonra	Fark-dj
110	80	-30	90	91	1	100	86	-14
100	80	-20	100	78	-22	120	74	-46
130	95	-35	110	80	-30	115	80	-35
110	85	-25	110	77	-33	120	86	-34
110	86	-24	100	79	-21	100	82	-18
110	89	-21	110	93	-17	130	97	-33
100	80	-20	130	92	-38	100	101	1
120	88	-32						

n=22 ,

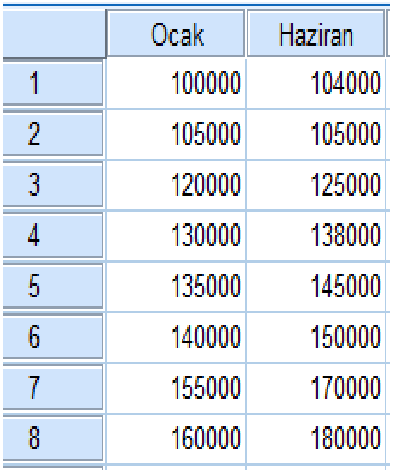
$$\bar{d}=\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}=\frac{546}{22}=-24.82$$

$$t=\frac{\bar{d}-\delta}{\sqrt{\frac{s_d^2}{n}}}=\frac{24.82-0}{11.53\sqrt{\frac{1}{22}}}=-10.09\approx t_{(n-1;\alpha)}=t_{21,0.05}$$

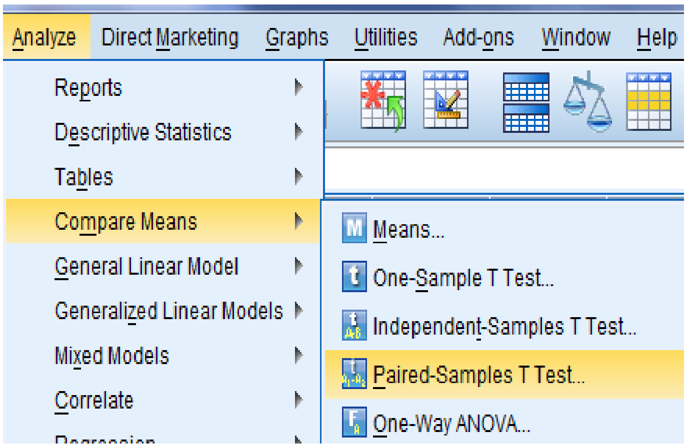
t_h=10.09>t_t =1.721 H_0 reddedilir. Ameliyat şeker miktarını düşürmüştür.

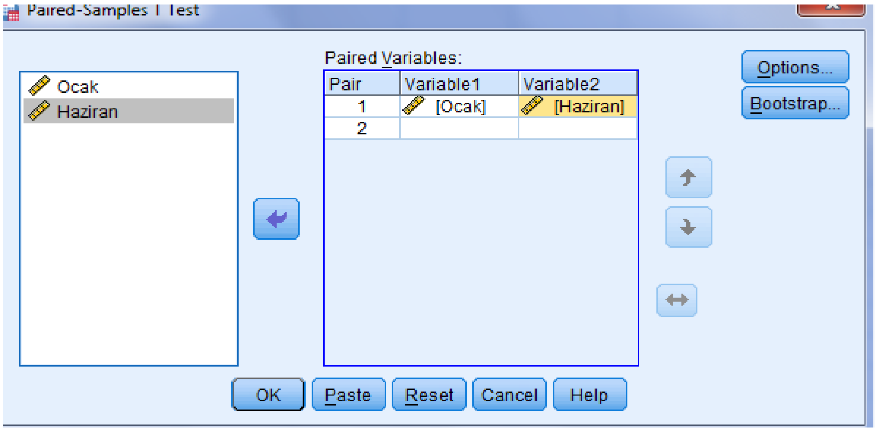
Örnek 3.4. Bir bölgede rasgele seçilen 8 binanın ocak ve haziran ayı fiyatları aşağıdaki gibidir. Fiyatlar arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık var mıdır?

Ocak (TL)	Haziran (TL)
100.000	104.000
105.000	105.000
120.000	125.000
130.000	138.000
135.000	145.000
140.000	150.000
155.000	170.000
160.000	180.000



	Ocak	Haziran
1	100000	104000
2	105000	105000
3	120000	125000
4	130000	138000
5	135000	145000
6	140000	150000
7	155000	170000
8	160000	180000





Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ocak	130625,00	8	21619,683	7643,712
	Haziran	139625,00	8	27707,335	9796,022

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Lower	Upper			
Pair 1	Ocak - Haziran	-9000,000	6347,103	2244,040	-14306,311	-3693,689	-4,011	7	,005

P=0.005<0.05 olup bina fiyatlarında anlamlı bir farklılık olmuştur. Mean=-9000 olması fiyatlarda istatistiksel olarak anlamlı bir artış olduğunu göstermektedir. Çünkü ortalama farkı alınırken $\mu_1 - \mu_2$ alınmıştır.

3.3. İki Oran Farkı İçin Hipotez Testi

Bu testlerde karşıt hipoteze örnek olarak şunlar verilebilir:

- ✓ A ve B bölümü öğrencilerinin başarı oranları farklıdır.
- ✓ Lise mezunlarının üniversiteye girme oranı Anadolu liselerinkinden düşüktür.
- ✓ Futbol seyretme oranı erkeklerde daha yüksektir.

$0<\pi_1<1$, $0<\pi_2<1$ olmak üzere

$H_0 : \pi_1=\pi_2$ $\qquad$ $H_0 : \pi_1=\pi_2$ $\qquad$ $H_0 : \pi_1=\pi_2$

$H_1 : \pi_1\neq\pi_2$ $\qquad$ $H_1 : \pi_1<\pi_2$ $\qquad$ $H_1 : \pi_1>\pi_2$

$$Z=\frac{(p_1-p_2)-(\pi_1-\pi_2)}{s_{p_1-p_2}} \quad , \quad s_{p_1-p_2}=\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

Örnek 3.5. İki mahaldeki eski bina oranlarının farklı olduğu iddia edilmektedir. Bu amaçla I. mahalleden rastgele seçilen 40 binanın 30'u, II. Mahalleden ise 50 binanın 35'i eskidir. %5 anlamlılık düzeyine göre iddianın doğruluğunu test ediniz.

Z-tablo=1,96

Çözüm : $H_0 : \pi_1=\pi_2$ $\qquad$ $p_1=30/40=0.75$

$H_1 : \pi_1\neq\pi_2$ $\qquad$ $p_2=35/50=0.70$

$$s_{p_1-p_2}=\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}=\sqrt{\frac{0.75(1-0.75)}{40}+\frac{0.7(1-0.7)}{50}}=0.094$$

$$Z=\frac{(p_1-p_2)-(\pi_1-\pi_2)}{s_{p_1-p_2}}=\frac{(0.75-0.70)-0}{0.094}=0.53$$

$Z_t=1.96>Z_h=0.53$ olduğundan H_0 red edilemez. Yani iki mahalledeki eski bina oranları arasında anlamlı bir farklılık bulunmamıştır.

Örnek 3.6. Bir ildeki okur yazar oranının il merkezinde kırsal kesime göre daha yüksek olduğu iddia edilmektedir. Rasgele il merkezinden seçilen 1000 kişiden 850'sinin ve kırsal kesimden 1500 kişiden 975'inin okur-yazar olduğu belirlenmiştir. %1 anlamlılık düzeyine göre kararınız ne olur? Z-tablo=2.33

Çözüm:

$H_0 : \pi_1=\pi_2$ $p_1=850/1000=0.85$

$H_1 : \pi_1>\pi_2$ $p_2=975/1500=0.65$

$$s_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{0.85(1-0.85)}{1000}+\frac{0.65(1-065)}{1500}} = 0.017 \ ,$$

$$Z = \frac{(0.85-0.65)-0}{0.017} = 11.76$$

Z_t =2.33<Z_h =11.76 olduğundan H_0 reddedilir. Okur-yazar oranı il merkezinde kırsal kesime göre daha yüksektir.

ÖRNEK PROBLEMLER

1. Bir konserve fabrikasının üretmiş olduğu konservelerin ağırlığının ortalaması 1000 gr olması gerekirken, tüketiciler firmanın buna uymadığını iddia etmektedirler. Üretim bandından alınan 16 konservenin ortalama ağırlığı 990 gr bulunmuştur. Anakütle varyansının da 256 olduğu bilinmektedir. Veriler normal dağılışlıdır. %5 anlamlılık düzeyine göre firmanın 1000 gr'lık ortalama ağırlığa uyup uymadığını araştırınız?

t-Tablo =1,96

Çözüm :

$H_0 : \mu$=1000 gr   Anlamlılık düzeyi=α=0.05

$H_1 : \mu \neq$1000 gr $Z_{\alpha/2}$=1.96

$$t = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{990-1000}{16/\sqrt{16}} = -2,5 \qquad |-2,5| > 1,96$$ H_0 reddedilir.

Firma konserve kutularının ağırlığını 1000 gr olarak piyasaya sürmemektedir.

2. Bir oto akü firması akülerinin 42 ayın üzerinde kullanabileceğini iddia etmektedir. Bu iddiayı araştırmak üzere 10 adet akü alınmış ve dayanma süreleri ay olarak şöyle bulunmuştur : 42,36,40,39,35,43,45,43,41,46

Veriler normal ve α=0.05 için üretici firmanın iddiasını test ediniz? (t-Tablo=1,833)

Çözüm :

$H_0 : \mu=42$

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{410}{10} = 41 \text{ , } s^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n-1} = 12{,}89$$

$H_1 : \mu>42$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{41-42}{3{,}59/\sqrt{10}} = -0{,}88$$, -0.833<1,833 H_0 red edilemez.

Karar: Akülerin dayanma süreleri 42 ayın üstünde değildir.

3. Farklı maddelerden yapılmış aynı büyüklükteki iki cismin basınca dayanma gücü aşağıda verilmiştir. Ortalama dayanma güçleri arasındaki farklılığın önemli olup olmadığına %1 anlamlılık seviyesinde karar veriniz? (Anakütle varyansları bilinmiyor ancak eşit olduğu varsayılıyor, veriler normaldir. T-tablo=3.05

X_1 maddesi : 1843 28 50 16 32 13

X_2 maddesi : 4054 26 63 21 37 39

Çözüm:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ise

$$s = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(7-1)198{,}62 + (7-1)215{,}33}{7+7-2}} = 14{,}39$$

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s \times \sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}} = \frac{(28{,}57-40)-0}{14{,}39 \times \sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}}} = -1{,}49$$

3,05>1,49 olduğundan H_0 red edilemez.

Karar: İki maddenin basınca dayanma bakımından aralarında bir farklılık yoktur.

4. Son 7 yıllık kayıtlara göre A bölgesinde Mart ayı için yağan yağışlar ile yine son 6 yıllık kayıtlara göre B bölgesinde yağan yağışların miktarları cm olarak aşağıda verilmiştir. A bölgesine düşen yağışların B bölgesinden daha az olduğu iddiasını %5 anlamlılık seviyesinde test ediniz? (Anakütle varyanslarının eşit olmadığı varsayılıyor, veriler normal ve Tablo=1,943)

A Bölgesi : 5 13 18 6 4 2 15

B Bölgesi : 40 54 26 63 2 37

Çözüm:

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ise

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{9 - 40{,}17}{\sqrt{\frac{38{,}67}{7} + \frac{258{,}17}{6}}} = -4{,}47$$

t_t=-1,943 > t_h =-4, 47 olduğundan H_0 reddedilir.

Karar : A bölgesine düşen yağış Şubat ayında B Bölgesinden daha azdır.

5. Üniversite sınavına giren öğrencilerin matematik sınav sonuçları bir dershaneye gitmeden ve gittikten sonra değerlendiriliyor. Öğrencilerin aldıkları sonuçların normal dağıldığı varsayılıyor ve 10 öğrenci ele alınıyor. Sonuçlar aşağıda verilmiştir. %5 anlamlılık seviyesinde dershaneye gitmenin etkili olduğu (daha iyi olduğu) söylenebilir mi? (Tablo=1,833)

Çözüm:

H_0: $\delta=(\mu_1-\mu_2)=0$ ve H_1: $\delta < 0$

Önce	Sonra	Fark-dj
40	52	-12
47	45	2
33	51	-18
54	60	-6
61	58	3
39	69	-30
42	65	-23
47	63	-16
58	59	-1
50	72	-22

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = -12{,}3$$

$$t = \frac{\overline{d} - \delta}{\sqrt{\frac{s_d^2}{n}}} = \frac{-12{,}3}{\sqrt{\frac{130{,}45}{10}}} = -3{,}41 < t_t = -1{,}833$$

H0 reddedilir, yani dershane matematik notlarını artırmıştır.

6. Üniversite öğrencileri arasında düzenli bir şekilde sigara alınıp alınmadığı konusunda bir araştırma yapılmıştır. Bu araştırmada ele alınan 200 erkek öğrenciden 116'sının, 200 bayan öğrenciden de 92'sinin düzenli bir şekilde sigara aldığı ortaya çıkmıştır. Erkeklerin bayanlardan daha fazla olduğu %95 güvenle söylenebilir mi? (Tablo=1,645)

Çözüm : $H_0 : \pi_1=\pi_2$ p_1=116/200=0.58

$H_1 : \pi_1>\pi_2$ p_2=92/200=0.46

$$s_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} = \sqrt{\frac{0,58(1-0,58)}{200}+\frac{0,46(1-0,46)}{200}} = 0.071$$

$$Z = \frac{(p_1-p_2)-(\pi_1-\pi_2)}{s_{p_1-p_2}} = \frac{0,58-0,46}{0,071} = 1,70$$

Z_t =1.645<Z_h =1,7 olduğundan H_0 reddedilir. Yani erkekler bayanlardan daha fazla alkol tüketmektedir.

7. Kansere karşı geliştirilen iki ilacın kanser üzerinde etkisinin varyanslarının eşit olduğu biliniyor. Yeni geliştirilen bir ilacın kanser üzerinde daha etkili olduğu iddia ediliyor. Rastgele seçilen örneklemler ilgili veriler aşağıdaki gibi bulunmuştur. %5 anlamlılık seviyesinde iddianın doğruluğunu araştırınız (Veriler normal dağılışlıdır, Tablo=1.67)

Çözüm:

	n	AO.	s^2
I.Yöntem	: 24	2,063	0,0009
II. Yöntem	: 25	2,041	0,0004

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ise

$$s = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(23-1)0,0009+(25-1)0,0004}{24+25-2}} = 0,00064$$

$$t = \frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{s\times\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}} = \frac{(2,063-2,041)-0}{0,00064\times\sqrt{\frac{1}{24}+\frac{1}{25}}} = 3,03$$

3,03>1,67 olduğundan H_0 ret edilir.

8. Bir hastalığın tedavisinde 2 farklı yöntem uygulanmaktadır. Bu tedavi yöntemlerinin hastaları iyileştirmedeki etkilerinin farklı olduğu iddia edilmektedir. Hastaların iyileşme süreleri üzerinden yaşlarının etkisi arındırılmak isteniyor. Bunun için 7 ayrı yaş grubundan birer çift hasta rastgele olarak 2 gruptan birine rastgele ayrılarak 7 şerli 2 grup oluşturulmuştur. Gruplara sözü edilen tedavi uygulanarak iyileşme günleri aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

x_{1i}: 18, 17, 15, 12, 12, 10, 7

x_{2i}: 16, 16, 14, 13,11, 10, 4

İyileşme süresi üzerinden hastaların etkisi arındırıldıktan sonra tedavi yöntemlerinin etkilerinin farklı olduğu % 5 anlamlılık düzeyinde söylenebilir mi?

Çözüm:

$\mathrm{H}_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$\mathrm{H}_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

$\bar{x}_1 = 13$
$\bar{x}_2 = 12$

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1$

$\boldsymbol{x_{1i}}$	$\boldsymbol{x_{2i}}$	$\boldsymbol{(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}$	$\boldsymbol{(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}$	$\boldsymbol{(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2)}$
18	**16**	**25**	**16**	**20**
17	16	16	16	16
15	14	4	4	4
12	13	1	1	1
12	11	1	1	1
10	10	9	4	6
7	4	36	64	48
+ ——	+ ——	+ ——	+ ——	+ ——
91	84	92	106	96

$S_1^2 = \frac{92}{7-1} = 15,33$ $\qquad S_2^2 = \frac{106}{7-1} = 17,66$ $\qquad S_{12} = \frac{96}{7-1} = 16$

$$S^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \frac{15,33}{7} + \frac{17,66}{7} - 2\frac{16}{7} = 2,19 + 2,52 - 4,57 = 0,14$$

$$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = 0,37$$

$$t_h = \frac{1}{0,37} = 2,70$$

2,447< 2,70 $\Longrightarrow \mathrm{H}_0$ hipotezi reddedilmiştir.

Yorum: $\alpha = 0{,}05$ anlamlılık düzeyinde tedavi yöntemlerinin etkilerinin farklı olduğu iddiası istatistiksel olarak desteklenememiştir.

10. Rastgele olarak seçilen 7 şeker hastasının kan şekerleri miktarları ölçülmüş ve daha sonra bu hastalar belli bir tedaviye alındıktan sonra kan şekerleri yeniden ölçülmüştür.

x_{1i}: 120, 130, 135, 140, 145, 150, 160

x_{2i}: 100, 95, 115, 112, 121, 118, 132

$\alpha = 0{,}05$ olmak üzere tedavinin etkin olduğu söylenebilir mi?

Çözüm:

$\mathrm{H}_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$\mathrm{H}_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

$\bar{x}_1 = 140$
$\bar{x}_2 = 113{,}28$

x_{1i}	x_{2i}	$(x_{1i} - \bar{x}_1)^2$	$(x_{2i} - \bar{x}_2)^2$	$(x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)$
120	100	400	176,35	265,6
130	95	100	334,15	182,8
135	115	25	2,95	8,6
140	112	0	1,63	0
145	121	25	59,59	38,6
150	118	100	22,27	47,2
160	132	400	350,43	374,4
+ ——	+——	+ ——	+ ——	+ ——
91	84	92	106	96

$S_1^2 = \frac{1050}{7-1} = 175$ $\quad S_2^2 = \frac{947{,}37}{7-1} = 157{,}89$ $\quad S_{12} = \frac{917{,}2}{7-1} = 152{,}86$

$$S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}^2 = \frac{175}{7} + \frac{157{,}89}{7} - 2\frac{152{,}86}{7} = 25 + 22{,}55 - 43{,}67 = 3{,}88$$

$S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 1{,}96$

$t_h = 13{,}63$

13,63 > 2,447 $\Longrightarrow \mathrm{H}_0$ hipotezi reddedilmiştir.

Yorum: $\alpha = 0{,}05$ anlamlılık düzeyinde tedavi yönteminin etkili olduğu iddiası istatistiksel olarak desteklenmiştir.

11. Yabancı dil eğitimi veren 2 dershanenin etkilerinin farklı olduğu iddia edilmektedir. Dershanenin birinden henüz mezun olanlardan 80 ikincisinden 100 öğrenci rastgele seçilmiş bir teste tabi tutulmuştur. Değerlendirme sonucunda birinci dershanenin öğrencilerinden 60 ‘ı ve ikinci dershanenin öğrencilerinden 80 ‘i başarılı olduğu görülmüştür. Anlamlılık düzeyi 0,05 olmak üzere dershanenin etkileri konusunda ne söylenebilir?

Çözüm:

$\mathrm{H}_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$

$\mathrm{H}_1: \pi_1 - \pi_2 \neq 0$

$p_1 = \frac{60}{80} = 0,75$

$$p_2 = \frac{80}{100} = 0,80$$

$$\sigma^2_{p_1 - p_2} = \frac{0,75(0,25)}{80} + \frac{0,80(0,20)}{100} = 0,0023 + 0,0016 = 0,0039$$

$$Z_h = \frac{0,75 - 0,80}{\sqrt{0,0039}} = -0,80$$

-1,96 < -0,80 < 1,96 $\Longrightarrow \mathrm{H}_0$ hipotezi reddedilememiştir.

Yorum: $\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyinde dershanelerin etkilerinin aynı olduğuna dair iddia istatistiksel olarak desteklenmiştir.

12. $\mathrm{n}_1 = 10$ çaplı örnekten $S_1^2 = 210$ ve $\mathrm{n}_2 = 7$ çaplı örnekten $S_2^2 = 167$ olarak bulunmuş olsun. $\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyinde birinci yığına ilişkin varyansın, ikinci yığına ilişkin varyansdan büyük olduğu söylenebilir mi?

Çözüm:

$\mathrm{H}_0: \sigma_1 = \sigma_2$

$\mathrm{H}_1: \sigma_1 > \sigma_2$

$\mathrm{F_h} = \frac{210}{167} = 1,257$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{F_t} = 3,23$

1,257 < 3,23 $\quad \mathrm{H}_0$ hipotezi reddedilememiştir.

Yorum: $\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyinde birinci yığın varyansının ikinci yığın varyansından büyük olduğu iddiası istatistiksel olarak desteklenememiştir.

3.4. İki Varyansa İlişkin Hipotez Testi

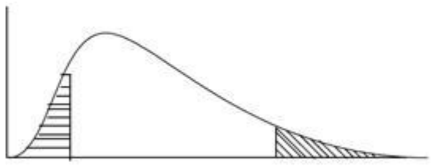
Varyansları $\acute{o}_1^2$ ve σ_2^2 olan normal dağılımlı iki anakütleden n_1 ve n_2 gözlemli bağımsız iki örneğin varyansları s_1^2 ve s_2^2 olsun. İki anakütle varyansının birbirine eşit olup olmadığını test etmek için n_1-1, n_2 -1 serbestlik dereceli F dağılımı kullanılır.

Test istatistiği:

$$F_h = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$$

şeklindedir.

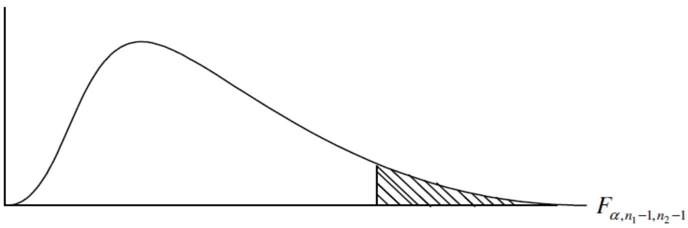
Çift yönlü hipotez testleri ;



$\mathrm{F_h} < \mathrm{F}_{\mathrm{n_1-1,n_2-1;1-\frac{\alpha}{2}}}$ veya $\mathrm{F_h} > \mathrm{F}_{\mathrm{n_1-1,n_2-1;\frac{\alpha}{2}}}$ ise $\mathrm{H_0}$ hipotezi reddedilir.

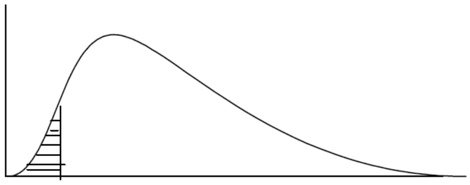
Tek yönlü hipotez testleri;

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$



$\mathrm{F_h} > \mathrm{F}_{\mathrm{n_1-1,n_2-1;\alpha}}$ ise $\mathrm{H_0}$ hipotezi reddedilir.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$



$F_h < F_{n_1-1,n_2-1;\alpha}$ ise H_0 hipotezi reddedilir.

Örnek 3.7.İki farklı yöntem ile üretilen demir çubuklarının kırılma dirençlerine ilişkin varyansların karşılaştırılması istenmiştir. Karşılaştırmayı yapabilmek için A yöntemi ile üretilen 11 ve B yöntemi ile üretilen 21 tane ürün rastgele seçilmiştir. A ve B yöntemleri ile üretilen ürünlerin varyansları sırasıyla 529 ve 361 olarak elde edildiğine göre, 0,05 anlamlılık düzeyinde A yöntemi ile üretilen ürünlerin kırılma dirençlerine ait varyansın daha büyük olup olmadığını test ediniz.

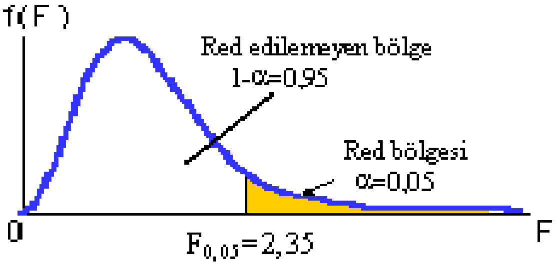
Çözüm:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

$\alpha = 0{,}05$ olmak üzere test istatistiği,

$$F_h = \frac{529}{361} = 1{,}465$$

$sd_1=n_1-1=10$ ve $sd_2=n_2-1=20$ olup $\alpha=0{,}05$ için F tablo değeri $F_{10,20;0.05} = 2{,}35$ dir.



$F_h < F_{10,20;0.05}$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilemez.

Yorum: 0,05 anlamlılık düzeyinde, bu iki farklı yöntem ile üretilen ürünlerin demir çubukların kırılma dirençlerine ait varyansın eşit olduğu söylenebilir.

Örnek 3.9. Aynı işi yapan iki işçinin bu işi yapım sürelerinin varyanslarının eşit olup olmadığı karşılaştırılmak isteniyor. Bu amaçla 1. işçinin yaptığı rasgele 13 iş gözlemlenmiş varyansının 25 dk. olduğu görülmüştür. Aynı şekilde 2. işçinin yaptığı 16 iş gözlemlenmiş varyansının 40 dk. olduğu görülmüştür. İki işçinin bu işi yapım sürelerinin varyanslarının farklı olup olmadığını %5 anlam düzeyinde test edip karar veriniz.

Çözüm:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

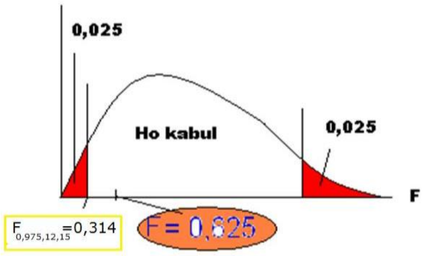
$\alpha = 0{,}05$ olmak üzere test istatistiği

$$F_h = \frac{25}{40} = 0{,}625$$

$sd_1=n_1-1=12$ ve $sd_2=n_2-1=15$ olup $\alpha=0{,}05$ için F tablo değerleri

$$\mathrm{F}_{n_1-1,n_2-1;\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{F}_{12,15;\frac{0.05}{2}} = 2{,}96$$

$$\mathrm{F}_{n_1-1,n_2-1;1-\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{F}_{12,15;0.975} = \frac{1}{\mathrm{F}_{15,12;0.025}} = \frac{1}{3{,}18} = 0{,}314$$



$F_{hesap} = 0{,}625 > F_{0{,}975,12,15} = 0{,}314$

olduğundan H_0 reddedilemez.

Yorum: iki işçinin bu işi yapma varyanslarının farklı olduğunu söylemek mümkün değildir

4.VARYANS ANALİZİ (ANOVA)

İkiden çok bağımsız grup söz konusu ise ve bu gruplardaki veriler nicel veriler ise bu grup ortalamaları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık olup olmadığına Varyans Analizi (ANOVA) ile karar verilebilir.

DENEY

- Problemin Tanımı
- Bağımlı değişkenin seçimi
- Bağımsız değişkelerin seçimi
    - Nite-Nicel
    - Sabit yada rasgele
- Etken düzeylerinin birleştirilmesi

DÜZEN

- Gözlem sayısı
- Deneyin sırası
- Kullanılacak rasgeleleştirme yöntemi
- Matematiksel model kurulumu

ÇÖZÜMLEME

- Veri toplama ve işleme
- Test istatistiklerinin hesabı
- Sonuçların yorumu

Muamele: Araştırıcının etkisini araştırdığı etmen (faktör, uygulama).

Tekerrür: Aynı muamelenin uygulandığı birden fazla deneme ünitesine verilen isimdir. Tekerrür sayısı arttıkça denemenin güvenilirliği artar.

Deneme Ünitesi: Araştırıcının ele aldığı en küçük deneme birimidir. Balıkların büyümesi denemesinde her bir deneme havuzundaki balıklar deneme ünitesidir.

Denemenin Kurulması: Muameleler ve sayısı belirlenir. Sonra her bir muamele için tekerrür sayısı belirlenir.

Muamele sayısı arttıkça karşılaştırma sayısı çok daha fazla olacaktır. Bu nedenle 2'den fazla karşılaştırmayı aynı anda yapan varyans analizi tekniği 1925'de Fisher tarafından geliştirilmiştir.

Örnek olarak, 4 farklı barajdaki aynalı sazanların ortalama ağırlıklarının aynı olup olmadığı test edilmek istendiğinde, ikili olarak aşağıdaki gibi 6 karşılaştırma yapmak gerekir.

Varyans analizi yapılabilmesi için bazı varsayımların tutması gerekir. Bunun için bu varsayımların her birinin ayrı ayrı istatistik testleri vardır. Bu testler yapıldıktan sonra tüm varsayımlar tutuyor ise varyans analizine geçilir. Tutmuyor ise verilerin transformasyonları (karekök, logaritmik, açı transformasyonları veya araştırıcının belirlediği bir transformasyon) yapılarak yeniden varsayımlar test edilir. Transformasyonlardan sonra varsayımlar yerine gelmiş ise varyans analizine geçilir. Hala varsayımlar tutmuyorsa, varyans analizi yapılamaz. Bu durumlarda başka yöntemler vardır. Bu yöntemler,

1-Kruskal-Wallis Rank Analizi,

2-Brown ve Forsythe'ın Modifiye F'istatistiği,

3-Box'un Normal F İstatistiği,

4-Tartılı Kareler Ortalaması Yöntemidir.

4.1.Model Varsayımları

1-Toplanabilirlik varsayımı,

2-Eşit varyans (homojen varyans)

3-Hataların tesadüfi, normal dağılışlı olması varsayımı,

4-Y_{ij}'lerin Y şans değişkeninin gözlenmiş değerleri olması varsayımı.

Varyanslar heterojen iken varyans analizi yapıp sonuçları yorumlamak hatalı neticeler verebilir. Bu nedenle böyle durumlarda veriler bir transformasyona tabi tutulup varyansların homojenliği sağlandıktan sonra varyans analizi yapılır. Eğer bu şekilde de homojenlik sağlanamaz ise Kruskal-Wallis rank analizi (Siegel, 1956; Gibbons, 1971), Welc analizi (Sokal ve Rholf,1969), Modifiye f istatistiği (Brown ve Forsythe, 1974) veya Box analizi (Box, 1954) gibi analiz şekillerinden biri kullanılabilir.

Sabit Model (Fixed): Etkilerin araştırıcı tarafından tesadüfen değil, bilinçli olarak seçildiği modellerdir.

Şansa Bağlı Model (Random): Etkilerin mümkün tüm seçenekler içerisinden tesadüfen seçildiği ve denemeye alındığı modellerdir.

<u>Karışık Model (Mixed):</u> Hem sabit, hem şansa bağlı etkiler içeren modeldir.

Örneğin denenmesi mümkün biyolojik sınırlar içerisinde 1 mg'dan 100 mg'a kadar hormon dozları (1 mg, 2 mg, 3 mg, ...,100 mg) uygulanabilecekken bilinçli olarak 5,10,15,20 mg düzeyleri denemeye alınıyor ise, hormon dozları muamelesi sabit etkili olur. Eğer 1'den 100'e kadar yazıp kura ile örneğin 3-18-39-55-92 mg düzeylerini denemeye alırsa bu muamele şansa bağlı bir etkiye sahip olur. Model şansa bağlı olduğu zaman deneme sonuçları genelleştirilebilir.

- **<u>F- Testi</u>**

Tüm grupları bir arada ele alarak aralarında anlamlı bir fark bulunup bulunmadığı F testi ile yapılır. Normal dağılan bir anakütleden rasgele çekilen birbirinden farklı n hacimli örneklemlerin istatistiklerinden ki-kare istatistiklerini verir ve bunlarda ki-kare dağılımını meydana getirmektedir.

$$\chi^2 = \frac{(X_1 - \overline{X})^2}{\sigma^2} + \frac{(X_2 - \overline{X})^2}{\sigma^2} + \cdots + \frac{(X_n - \overline{X})^2}{\sigma^2} = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

Benzer şekilde normal dağılan iki farklı anakütleden n_1 ve n_2 hacimli bütün mümkün rasgele örneklemler seçilip aynı işlemler yapılırsa, $v_1= n_1$-1serbestlik dereceli χ_1^2 dağılımı ve $v_2= n_2$-1 serbestlik dereceli χ_2^2 dağılımı olmak üzere iki dağılım ortaya çıkar. χ_1^2 ve χ_2^2 istatistikleri kendi serbestlik derecelerine bölünüp birbirine oranlanırsa F istatistiği elde edilir.

$$F = \frac{\chi_1^2 / v_1}{\chi_2^2 / v_2} \quad , \qquad \begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k \\ H_1 : En\, az\, iki\, ortalama\ farklı \end{array}$$

ANOVA TABLOSU

Varyasyon Kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik Derecesi	Kareler Ortalaması	F Testi
VK	KT	SD	KO	F
Gruplar arası	GAKT	k-1	GAKO=GAKT/(k-1)	GAKO/HKO
Gruplar içi	GİKT=HKT	n-k	HKO=HKT/(n-k)	
Genel	GnKT	n-1	GnKO=GnKT/(n-1)	

Burada GAKO gruplar arası varyanstır. Gruplar arası varyans grupların ortalamaları arasındaki farklardan doğan değişkenliği ölçer. <u>Gruplar arası varyans ne</u>

kadar büyük ise, grup ortalamalarının birbirinden farklı olma olasılığı o kadar fazladır. HKO ise gruplar içi varyanstır. Gruplar içi varyans her gruptaki değerler arasındaki varyansı ifade eder ve rasgele nedenlere bağlı olan değişkenliği ölçer. Gruplar içi varyans ne kadar büyük ise, grup ortalamalarının birbirinden farklı olma olasılığı o kadar azdır. GnKO ise toplam varyansı gösterir. Toplam varyans gruplar arası varyans ile gruplar içi varyansın toplamına eşit değildir.

$$GnKT = \sum X^2 - \frac{\sum X}{n} \quad , \; GAKT = \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{(\sum X_j)^2}{n_j} \right] - \left[\frac{(\sum X)^2}{n} \right] \quad , \; HKO = GnKT - GAKT$$

4.2. Varyans Homojenliği İçin Hipotez Testi

F Testi

İki varyans için kullanılan bir testtir. Test istatistiği,

$$F = \frac{S^2 büyük}{S^2 küçük} \sim F_{pay\ S.D.,\ Payda\ S.D.,\ \alpha}$$

şeklindedir ve hipotezler,

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

şeklinde oluşturulur.

F_{max} Testi

İki veya daha fazla varyansın homojenlik testi için kullanılır. Test istatistiği,

$$F_{max} = \frac{S^2 en\ \ büyük}{S^2 en\ \ küçük} \sim F_{max\ (k,\ v, \alpha)}$$

şeklindedir. Burada,

k = Varyans sayısını,
v = Her bir varyans hesaplanırken eşit sayıda gözlem

var ise herhangi bir varyansın serbestlik derecesini ifade eder.

Bu testte hipotezler,

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \ldots\ldots\ldots = \sigma_k^2$$

$$H_1 : \text{en az biri farklı}$$

şeklinde kurulur.

Cochran Testi

İki veya daha fazla varyansın homojenlik testi için kullanılır. Test istatistiği,

$$C = \frac{S^2 \text{en büyük}}{\sum_i^{\ell} S_i^2} \sim C_{k,\, v,\, \alpha}$$

şeklindedir. Burada,

k = Varyans sayısını,

v = Varyansların içerdiği gözlemler eşit ise her bir varyansın serbestlik derecesini ifade eder.

Bartlett Testi

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2$

H_a: the variances are not all equal

TS: $B = \dfrac{\left[(S_1^2)^{n_1-1}(S_2^2)^{n_2-1}\cdots(S_k^2)^{n_k-1}\right]^{1/(N-k)}}{S_p^2}$

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)S_i^2}{N-k}$$

RR: $B \le b_{\alpha,k,n}$ $\quad (n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n)$

$B \le b_{\alpha,k,n_1,n_2,\ldots,n_k}$ (when sample sizes are unequal)

where $b_{\alpha,k,n_1,n_2,\ldots,n_k} \approx \dfrac{n_1 b_{\alpha,k,n_1} + n_2 b_{\alpha,k,n_2} + \cdots + n_k b_{\alpha,k,n_k}}{N}$

Brown-Forsythe Testi

Varyanslar heterojen ise ortalamalar arasındaki farklılığı test eden bir istatistiktir.

Test hipotezi,

$$H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$$
$$H_1: \text{En az biri farklıdır.}$$

Test istatistiği,

$$F' = \frac{MKT}{d} \sim F_{t\text{-}1,\hat{v},\alpha}$$
$$d = \sum_{i=1}^{t}\left(1-\frac{r_i}{n}\right)S_i^2$$
$$\hat{V} = \frac{d^2}{\sum_{i=1}^{t}\left(1-\frac{r_i}{n}\right)^2 (S_i^2)^2 / (r_i - 1)}$$

Welch Testi (Tartılı Ortalamalar Yöntemi)

Varyanslar heterojen ise ortalamalar arasındaki farklılığı test eden bir istatistiktir.

Test Hipotezi,

$$H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$$
$$H_1: \text{En az biri farklıdır.}$$

Test istatistiği,

Tartılı genel ortalama,

$$\overline{Y}^* = \frac{\sum_{i=1}^{t} W_i \overline{Y}_i}{\sum_{i=1}^{t} W_i}$$

Buradaki $\overline{Y}^*$ genellikle, $Y = \left[\sum_{i=1}^{t} r_i \overline{Y}_i / \sum_{i=1}^{t} r_i\right]$ şeklinde verilen basit tartılı ortalamaya eşit değildir. Ağırlıklar ve tartılı genel ortalama hesaplandıktan sonra

$$F^* = \frac{\sum_{i=1}^{t} W_i (\overline{Y}_i - \overline{Y}^*)^2 / (t-1)}{1 + \frac{2(t-2)}{t^2-1}\Omega} \sim F_{V_1, V_2, \alpha}$$

t: Grup sayısı,

$$V_1 = t - 1$$

$$V_2 = \frac{t^2 - 1}{3\Omega}$$

$$\Omega = \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{f_i}(1 - \frac{W_i}{W})^2$$

$$W = \sum W_i$$

$$F^* = \sum_{i=1}^{t} W_i (Y_i - \overline{Y}^*)^2$$

4.3. Çoklu Karşılaştırma Testleri (Multiple Comparison Tests)

ANOVA testi sonucunda H_0 hipotezi red edilirse, ortalamalar arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılığın olduğu söz edilebilir. Ancak hangi ortalamalar arasında fark olduğu belirlenemez. Bunun için çoklu karşılaştırma testlerine bakmak gerekir.

Örnek büyüklüğüne, varyansın homojenliğine, karşılaştırılacak ortalama sayısına ve önem düzeyine göre hangi çoklu karşılaştırma testin kullanılacağına karar verilir.

- <u>Ortalamaların Karşılaştırılması</u>

Ortalama karşılaştırma yöntemleri üç ana başlık altında toplanır.

1- Regresyon tekniği,

2- Contrast tanımlama,

<u>3- Çoklu karşılaştırma yöntemleri,</u>

i. Varyanslar Homojen ise

a) LSD testi

i) Korunmuş LSD testi

ii) Korunmamış LSD testi

b) Tukey testi

c) Duncan testi

d) SNK testi

e) Bonferroni

f) Scheffe

ii. Varyanslar Homojen Değilse

a) Tamhane's testi

b) Dunnet's T3

c) Games-Howell

ÖRNEK 4.1. Bir işletmede bulunan üç eşdeğer makine üretimi aşağıdaki gibidir. Bu üç makine arasında fark var mıdır?

	A	B	C	
	4	6	3	
	5	7	4	
	5	6	5	
	4	8	5	
	6	6	4	
	6	7	4	
	4	9	3	
	5	8	3	
	4	6	4	
	4	5	3	Toplam
Σx	47	68	38	153 (Σx)
Σx^2	227	476	150	853 (Σx^2)
n_j	10	10	10	30 (Σn)

I. Kareler toplamlarının bulunması:

GnKT:Genel Kareler Toplamı

$$\text{GnKT} = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n} = 853 - \frac{153^2}{30} = 72{,}7$$

GAKT: Gruplar arası kareler toplamı

$$GAKT = \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{(\sum X_j)^2}{n_j}\right] - \left[\frac{(\sum X)^2}{n}\right] = \left[\left(\frac{47^2}{10}\right)+\left(\frac{68^2}{10}\right)+\left(\frac{38^2}{10}\right)\right]-\left(\frac{153^2}{30}\right)=47{,}4$$

GiKT: Grup içi kareler toplamı

$$GİKT = GnKT - GAKT = 72{,}7 - 47{,}4 = 25{,}3$$

Serbestlik Derecelerinin Bulunması:

Genel serbestlik derecesi: GnSD= n-1 =30-1=29

Gruplar arası serbestlik derecesi: GASD=k-1=3-1=2

Grup içi serbestlik derecesi: GiSD= n-k=30-3=27

Kareler Ortalamasının Bulunması:

Gruplar arası kareler ortalaması:

$$GAKO = \frac{GAKT}{k-1} = \frac{47{,}4}{2} = 23{,}7$$

Grup içi kareler ortalaması:

$$GİKO = \frac{GİKT}{n-k} = \frac{25{,}3}{27} = 0{,}937$$

ANOVA TABLOSU

Varyasyon Kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik Derecesi	Kareler Ortalaması	F
VK	KT	SD	KO	
GA	47.4	2	23.7	23,7/0,937=25,3
Gi	25.3	27	0.937	
Gn	72.7	29		

Hipotezler: H_0: Gruplar arası fark yoktur ($\mu_A = \mu_B = \mu_C$)

H_1: En az iki grup ortalaması farklıdır.

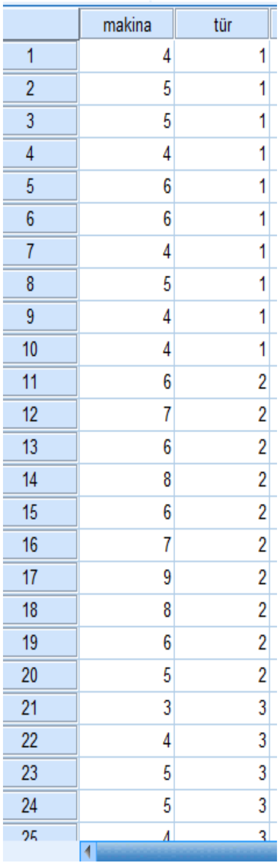
$$F = \frac{GAKO}{GİKO} = \frac{23{,}7}{0{,}937} = 25{,}3$$

Karşılaştırma: F_{Hesap}=25.3> $F_{2,27,\ 0.05}$ = 3.35 olduğundan H_0 ret edilir.

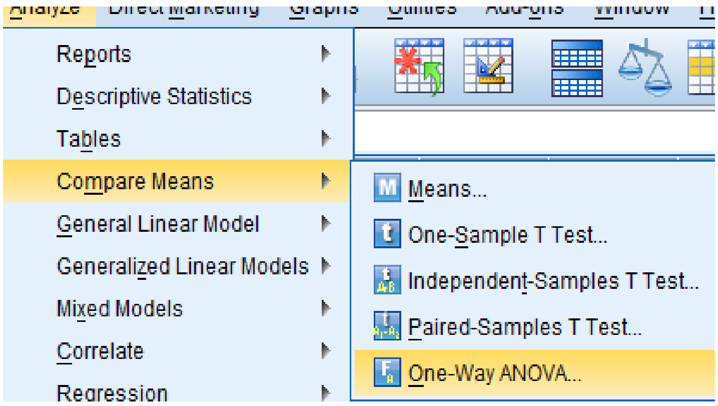
Sonuç: Gruplar arasında fark vardır. Üç makinenin üretimi arasında anlamlı bir fark bulunmuştur.

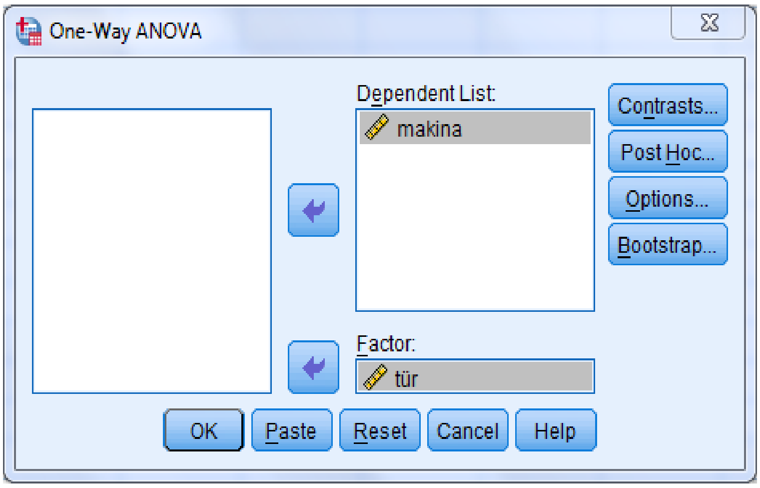
SPSS ÇÖZÜMÜ:

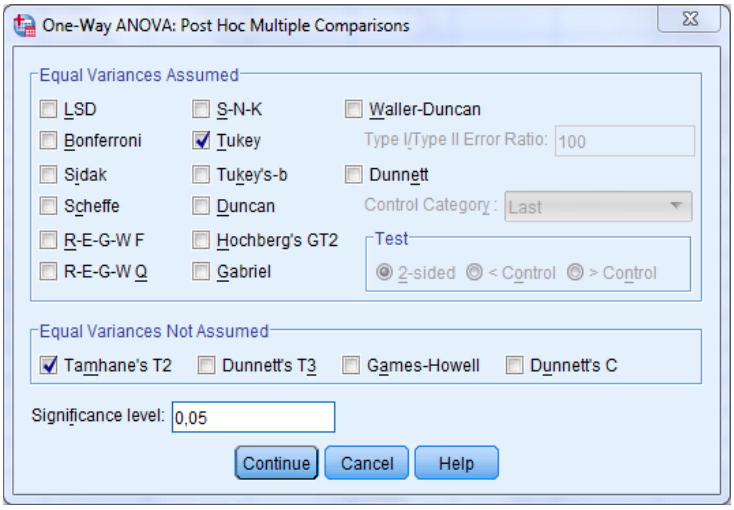
Önce verilerin normallik testi yapılır. Ondan sonra ANOVA ya bakılır.

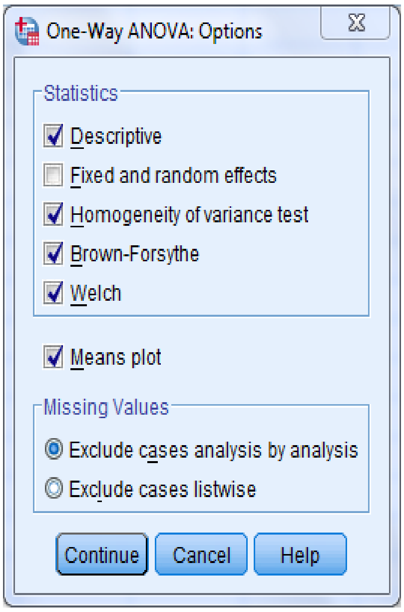


	makina	tür
1	4	1
2	5	1
3	5	1
4	4	1
5	6	1
6	6	1
7	4	1
8	5	1
9	4	1
10	4	1
11	6	2
12	7	2
13	6	2
14	8	2
15	6	2
16	7	2
17	9	2
18	8	2
19	6	2
20	5	2
21	3	3
22	4	3
23	5	3
24	5	3









Descriptives

makina

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean		Minimum	Maximum
					Lower Bound	Upper Bound		
A	10	4,70	,823	,260	4,11	5,29	4	6
B	10	6,80	1,229	,389	5,92	7,68	5	9
C	10	3,80	,789	,249	3,24	4,36	3	5
Total	30	5,10	1,583	,289	4,51	5,69	3	9

Varyansların homojenlik testi:

H0: Varyanslar homojendir.

H1: Varyanslar heterojendir.

Test of Homogeneity of Variances

makina

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
1,593	2	27	,222

H0 : $\mu_A=\mu_B=\mu_C$

H1: En az iki grup ortalaması farklıdır.

ANOVA

makina

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	47,400	2	23,700	25,292	,000
Within Groups	25,300	27	,937		
Total	72,700	29			

P=0.000<0.01 olduğundan en az bir grup ortalaması diğerlerinden farklıdır.

ÖRNEK PROBLEMLER

1. Bir fabrikada aynı işi yapmakta olan 4 işçinin rasgele belirlenen 6 gün içerisinde ürettikleri parça sayıları aşağıdaki gibidir. İşçilerin verimliliklerinin dağılımı normal ve anakütle varyanslarının eşit olduğu kabul ediliyor. Veriler normal olduğuna göre, önce ANOVA tablosunu tamamlayıp, sonra işçilerin günlük ortalama verimlilikleri arasında önemli bir farklılık bulunup bulunmadığını %1 anlamlılık düzeyinde araştırınız? Ftablo=4.94

İşçi 1	İşçi 2	İşçi 3	İşçi 4
36	55	52	82
43	42	99	83
51	44	31	61
39	49	37	41
48	53	43	48
53	39	50	45

ANOVA TABLOSU

VK	SD	KT	KO	F
Gruplar arası	?	804	?	?
Gruplar içi	?	?	?	
Genel	?	5940		

k=4 (grup sayısı), n=24 (toplam gözlem sayısı)

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$
$$H_1 : En\, az\, iki\, ortalama\ farklı$$

VK	KT	SD	KO	F
Gruplar arası	804	k-1=3	804/3=268	268/256.8=1.04
Gruplar içi	5136	n-k=20	5136/20=256.8	
Genel	5940	n-1=23		

$F_{3,20\,,\,0.01}$=4.94>F_h=1.04 H_0 kabul edilir.

2. Dört makinenin ürettikleri birimler aşağıda verilmiştir. Veriler normal olduğuna göre, önce ANOVA tablosunu tamamlayıp, sonra dört makinenin ortalamaları arasında önemli bir farklılık bulunup bulunmadığını %5 anlamlılık düzeyinde araştırınız? Ftablo=3.24

A	**B**	**C**	**D**
28	18	30	32
42	14	36	46
26	20	24	35
15	22	20	26
23	16	30	38

VK	SD	KT	KO	F
Gruplar arası	?	?	?	?
Gruplar içi	?	?	49,87	
Genel	?	5940		

k=4, n=20

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4 \; (En\, az\, iki\, ortalama\, farklı)$$

VK	KT	SD	KO	F
Gruplar arası	5142	k-1=3	1714	34,4
Gruplar içi	798	n-k=16	798/16=49,87	
Genel	5940	n-1=19		

$F_{3,16,\ 0.05}$=3,24<F_h=34,4 H_0 reddedilir.

5. Kİ-KARE TESTLERİ

Günümüzde yapılan birçok araştırmada nicel (sayısal) değişkenlerden ziyade nitel (sayısal olmayan) değişkenlerin dikkate alındığı gözlemlenmektedir. Ayrıca bazen nicel değişkenler uygun biçimde gruplandırma ile nitel değişken durumuna getirilebilir. İşte sayısal olmayan (nitel) değişkenlere ki-kare (χ^2) testi uygulanır.

Normal dağılan bir anakütleden rastgele çekilen n hacimli örneklem için ki-kare istatistiği hesaplanır.

<u>**Ki-Kare Dağılışı**</u>

Ki - kare dağılışı birbirinden bağımsız standart normal dağılıma sahip ($z \sim N_z(0,1)$) X rasgele değişkenlerinin karelerinin toplamının göstermiş olduğu dağılıştır. Ya da normal dağılıma sahip X rasgele değişkenlerinden sırasıyla her biri için anakütle ortalaması çıkartılıp, standart sapmaya bölünerek elde edilen standartlaştırılmış X rasgele değişkenlerinin kareleri toplamının gösterdiği dağılış olarak tanımlanabilir (Ergün, 1995).

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ iken $z = \dfrac{(X-\mu)}{\sigma}$ dönüşümü ile standartlaştırılır ve dağılış $z \sim N_z(0,1)$ şekline döner. Birbirinden bağımsız k tane örnek için elde edilen bu değerlerin kareleri toplamı,

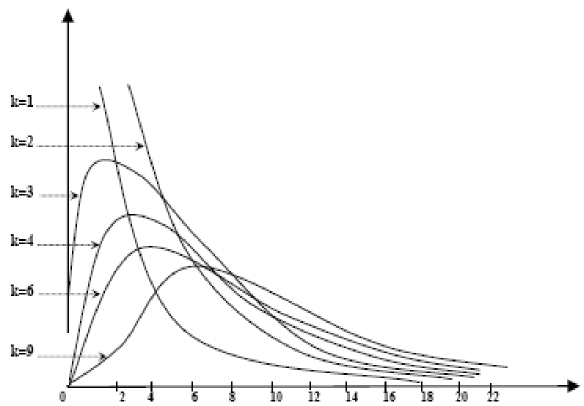
$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \ldots + Z_k^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 \quad \text{olup,}$$

k serbestlik dereceli χ^2 dağılımı gösterir. χ^2 dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f(\chi^2) &= \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \chi^{k/2-1} e^{-1/2} && , x > 0 \\ &= 0 && , x \leq 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Varyans ve aritmetik ortalamanın beklenen değeri arasında,

Ki-kare dağılımının tek parametresi serbestlik derecesidir (k). Ki-kare dağılışı <u>sağa çarpık</u> bir dağılıştır, serbestlik derecesi (k) arttıkça çarpıklık azalır ve dağılış normal dağılışa yaklaşır.



Çeşitli Serbestlik Derecelerinde Ki - kare Dağılışı

Ki-Kare Testinin Kullanımı

1. Bir frekans dağılımının herhangi bir teorik dağılıma uyup uymadığının kontrolü için yapılan testler
2. İki veya daha fazla gruptaki oranların eşitliğinin testi için yapılan testler
3. İki özelliğin birbirinden bağımsız olup olmadığının testi
4. Örnek frekanslarının homojenlik kontrolü

Yukarıdaki durumlarda χ^2 dağılışı kullanılarak hipotez testleri yapılabilir. χ^2 dağılışı sürekli ve sağa çarpık bir dağılıştır, üst kuyruğu daha uzundur. Genelde H_1 hipotezi tek yönlü olarak kurulur. Eğer çift yönlü kurulma mecburiyeti doğarsa o zaman alt ve üst bölgedeki kritik red bölgesi ayıran tablo değerleri ayrı ayrı okunur. Süreksiz bir dağılışa yaklaşımda kullanıldığında Yates düzeltmesi zorunludur.

5.1. Ki-Kare (χ^2) Uygunluk Testi

n hacimli bir örneklemin anakütleyi iyi temsil edip etmediğinin veya hangi dağılıma sahip bir anakütleden geldiği ki-kare uygunluk testi ile belirlenebilir. Beklenen değerler ile elde edilen değerler (gözlem) arasındaki uygunluk araştırılır.

H_0: Örneklem anakütleyi temsil edebilir (örneklem dağılımı anakütle dağılımına uygundur).

H_1: Örneklem anakütleyi temsil edemez (örneklem dağılımı anakütle dağılımına uygun değildir).

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(G_i - T_i)^2}{T_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{G_i^{\,2}}{T_i} - n$$

G_i: Gözlenen frekanslar T_i: Teorik frekanslar S.d.=r–1

$\chi^2 \le \chi^2_{tablo}$ ise H_0 reddedilemez.

Örnek 5.1. Bir araba firması bayilerden almış olduğu sipariş miktarlarının aylara göre değişip değişmediğini öğrenmek istiyor. Bu amaçla 12 aylık sipariş miktarları aşağıdaki gibi bulunmuştur.

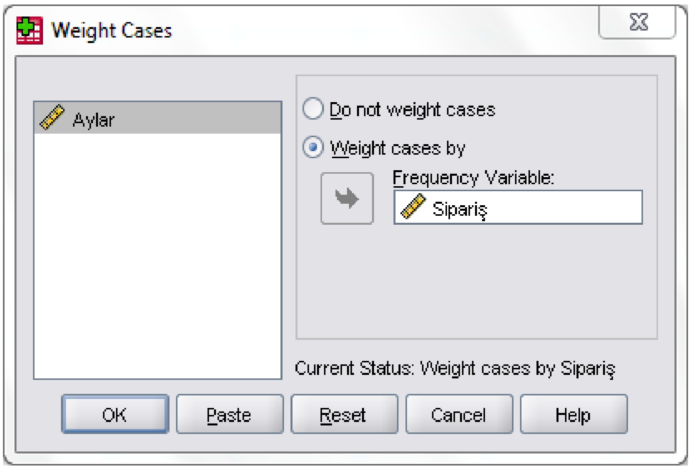
Ay	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sip.	45	55	56	61	63	75	84	90	96	100	104	110

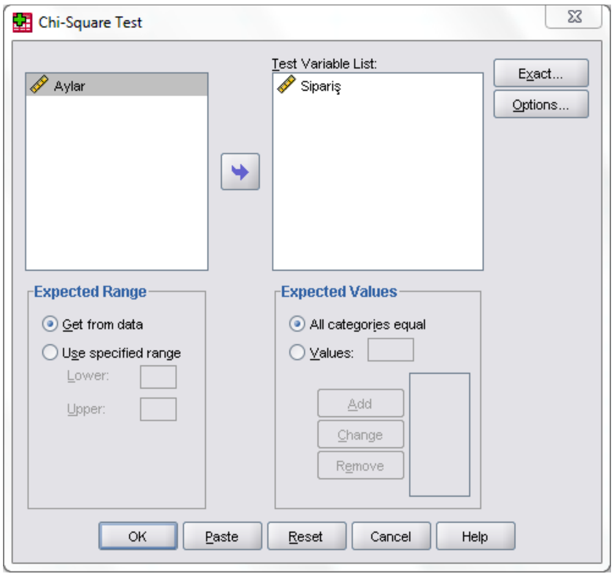
H_0: Aylara göre sipariş miktarları arasında fark yoktur.

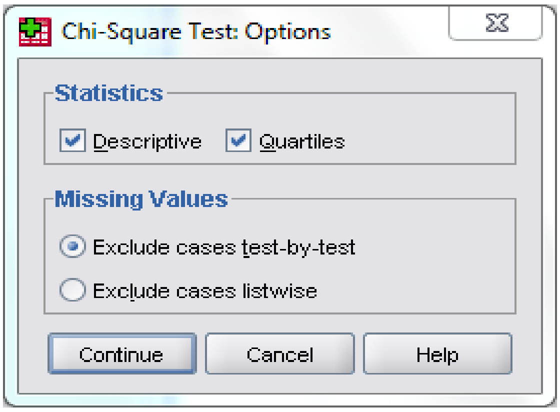
H_1: Aylara göre sipariş miktarları arasında fark vardır.

SPSS Çözüm:

Aylar	Sipariş
1	45
2	55
3	56
4	61
5	63
6	75
7	84
8	90
9	96
10	100
11	104
12	110







Descriptive Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum	Percentiles		
						25th	50th (Median)	75th
Sipariş	939	83,91	20,216	45	110	63,00	90,00	100,00

Sipariş

	Observed N	Expected N	Residual
45	45	78,3	-33,3
55	55	78,3	-23,3
56	56	78,3	-22,3
61	61	78,3	-17,3
63	63	78,3	-15,3
75	75	78,3	-3,3
84	84	78,3	5,8
90	90	78,3	11,8
96	96	78,3	17,8
100	100	78,3	21,8
104	104	78,3	25,8
110	110	78,3	31,8
Total	939		

Test Statistics

	Sipariş
Chi-Square	67,888[a]
df	11
Asymp. Sig.	,000

a. 0 cells (,0%) have expected frequencies less than 5. The minimum expected cell frequency is 78,3.

Tabloda her ay için gözlenen (Observed) ve beklenen (Expected) aylık sipariş miktarı ve bunların farkları (residual) verilmiştir.

Beklenen aylık sipariş miktarı: 939/12=78,3

p=0,00<0,05 olup H0 red edilir. Aylara göre sipariş miktarları arasında önemli bir farklılık vardır.

5.2. Ki-Kare Bağımsızlık Testi

Değişkenlerin 2x2 ya da rxc biçiminde ki çapraz tablolarda sınıflandırılması halinde, değişkenlerin arasında bağımsızlık yada bir değişim olup olamadığını ortaya koyan testtir. Çift yönlü tablolarda (kontenjans tablosu) yer alan değişkenlerden her ikisi nitel (sayısal olmayan) değişkenler arasındaki ilişkiler ki-kare bağımsızlık testi ile test edilebilir.

2x2 tablolarına Pearson ki-kare testi, Yates ki-kare (düzeltilmiş) ve Fisher ki-kare (kesin) testleri uygulanır. rxc tipindeki tablolara ise Pearson ki-kare testi yapılır. Serbestlik derecesi r satır sayısı ve c sütun sayısı olmak üzere (r-1)x(c-1) biçimindedir.

H_0: Değişkenler birbirinden bağımsızdır (Değişkenler arasında ilişki yoktur).

H_1: Değişkenler birbirinden bağımsız değildir (Değişkenler arasında ilişki vardır).

Satır	Sütun		Toplam
	C1	C2	
S1	A **A'**	B **B'**	N1=A+B
S2	C **C'**	D **D'**	N2=C+D
Toplam	N3=A+C	N4=B+D	N

$$\chi^2 = \sum\sum (G_{ij} - T_{ij})^2 / T_{ij} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} \frac{G_{ij}^2}{T_{ij}} - N$$

Burada G_{ij} gözlenen frekansları (A,B,C,D), T_{ij} (A',B', C', D') ise beklenen frekansları göstermektedir. Beklenen frekanslar satır ve sütun toplamlarının çarpımının genel toplama bölünmesi ile hesaplanır.

A'=N1*N3/N **B'**=N1*N4/N **C'**=N2*N3/N **D'**=N2*N4/N

Eğer $\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha,sd}$ veya P>0.05 ise H_0 red edilemez. Aksi durumda Hipotez reddedilir.

2x2 Çapraz tablolarda

Pearson Ki-kare Analizi : 2x2 tablosunda beklenen değerlerin tümü 25'te büyük ise uygulanır. ($T_{ij}>25$ ise)

$$\chi^2 = \sum\sum (G_{ij} - T_{ij})^2 / T_{ij}$$

Yates Ki-kare Testi : Gözlerdeki beklenen frekanslardan en az biri 5 ile 25 arasında ise uygulanır($5<T_{ij}<25$). n<50 olduğunda da Yates süreklilik düzeltmesine başvurulur.

$$\chi^2 = \sum\sum (\left|G_{ij} - T_{ij}\right| - 0.5)^2 / T_{ij}$$

Fisher Ki-kare Testi : Gözlerdeki beklenen frekanslardan en az biri 5 ten küçük ise uygulanır. ($T_{ij}<5$)

$$P = \sum (R1!C1!R2!C2!)/(N!A!B!C!D!)$$
$$= \sum (A+B)!(A+C)!(C+D)!(B+D)!/(N!A!B!C!D!)$$

Örnek 5.2. Bir bölgede binaların durumu ile fiyatı arasında bir ilişki olduğu iddia edilmektedir. Bu amaçlar bu bölgeden rastgele seçilen 780 binadan elde edilen bilgiler aşağıdaki tabloda verilmiştir. İddianın doğruluğunu %5 anlamlılık düzeyinde test ediniz. Tablo:3.84

Bina	Fiyat		Toplam
	Normal	Yüksek	
Eski	246	122	368
Yeni	125	287	412
Toplam	371	409	780

H_0: Binanın durumu ile fiyatı arasında ilişki yoktur. (değişkenler birbirinden bağımsızdır).

H_1: Binanın durumu ile fiyatı arasında ilişki vardır. (değişkenler arasında bir bağıntı vardır).

Bina	Fiyat		Toplam
	Normal	Yüksek	
Eski	246 **175**	122 **193**	368
Yeni	125 **196**	287 **216**	412
Toplam	371	409	780

$$\chi^2 = \sum\sum \frac{(G_{ij}-T_{ij})^2}{T_{ij}} = \frac{(246-175)^2}{175} + \frac{(122-193)^2}{193} + \frac{(125-196)^2}{196} + \frac{(287-216)^2}{216}$$

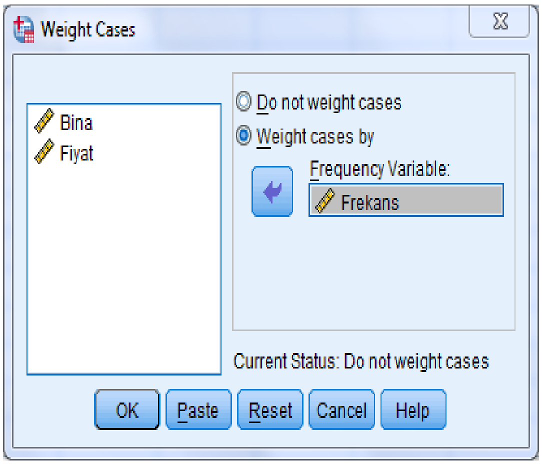
$$= 103.87$$

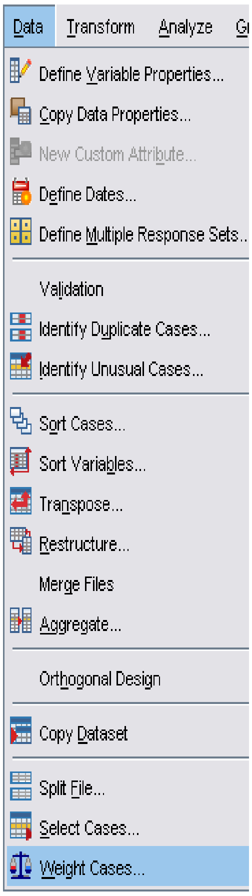
Serbestlik derecesi=(R-1)*(C-1)=(2-1)*(2-1)=1

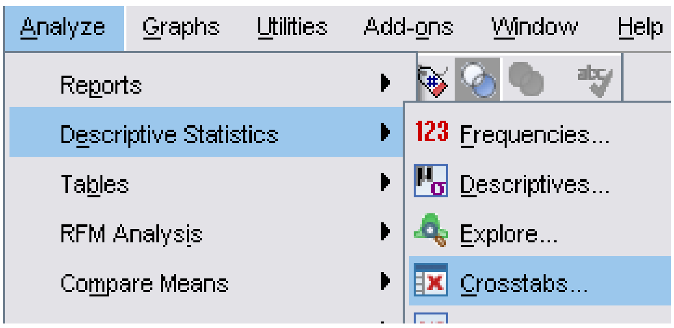
$\chi^2 = 103.87 > \chi^2_{0.01,\,1} = 6.64$ H_0 reddedilir. Binanın durumu ile fiyatı arasında ilişki vardır.

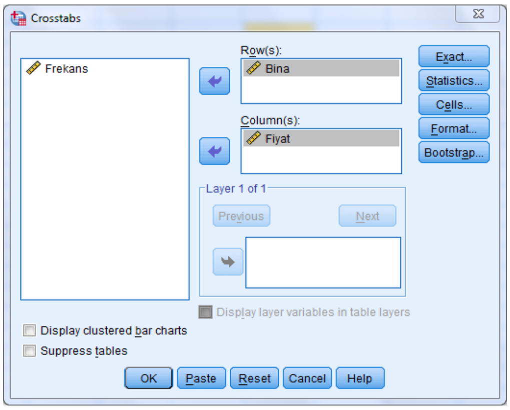
SPSS Çözüm:

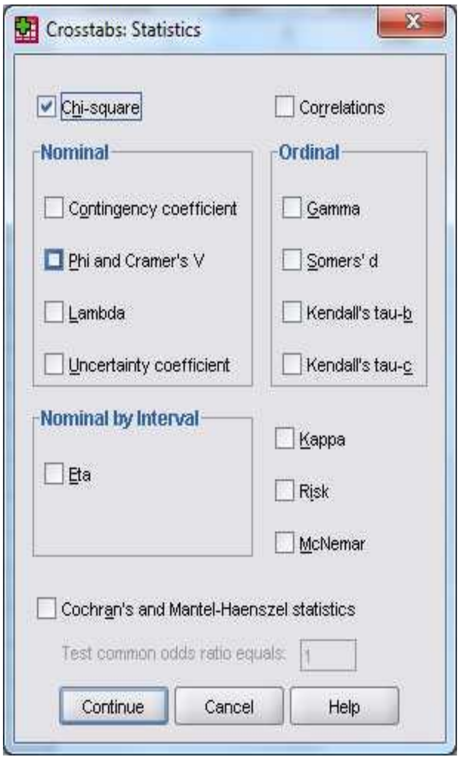
	Bina	Fiyat	Frekans
1	1	1	246
2	1	2	122
3	2	1	125
4	2	2	287

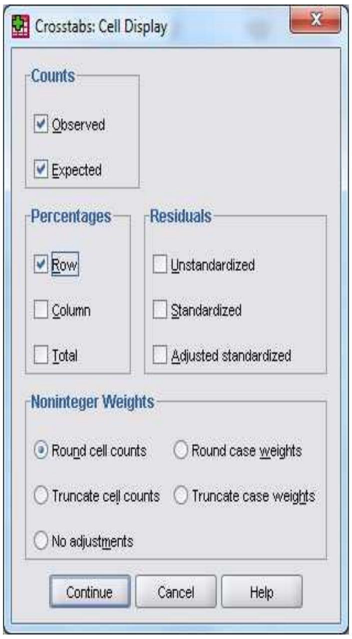












Bina * Fiyat Crosstabulation

			Fiyat		
			Normal	Yüksek	Total
Bina	Eski	Count	246	122	368
		Expected Count	175,0	193,0	368,0
		% within Bina	66,8%	33,2%	100,0%
	Yeni	Count	125	287	412
		Expected Count	196,0	216,0	412,0
		% within Bina	30,3%	69,7%	100,0%
Total		Count	371	409	780
		Expected Count	371,0	409,0	780,0
		% within Bina	47,6%	52,4%	100,0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	103,877[a]	1	,000		
Continuity Correction[b]	102,418	1	,000		
Likelihood Ratio	106,211	1	,000		
Fisher's Exact Test				,000	,000
Linear-by-Linear Association	103,744	1	,000		
N of Valid Cases	780				

a. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 175,04.

b. Computed only for a 2x2 table

Beklenen frekanslar oldukça büyük (>25) ve örnek sayısı da >50 olduğundan Pearson ki-kare testine bakılır. P=0,00 < 0.05 olduğundan H_0 reddedilir. Bina durumu ile fiyatı arsında anlamlı bir ilişki vardır.

Örnek 5.3. Sürücü ehliyeti almak üzere kursa 45 aday başvurmuş olup, başvuranların 20 tanesi bayandır. Kurs sonunda erkeklerden 8 kişi, bayanlardan ise 15 kişi başarılı olmuştur. Kurs sonundaki başarının cinsiyetle ilişkisi var mıdır, %5 anlamlılık düzeyinde karar veriniz. Tablo:3.84

Cinsiyet	Kurs		Toplam
	Başarılı	Başarısız	
Bayan	15	5	20
Erkek	8	17	25
Toplam	23	22	45

H_0: Kurs sonu başarı durumu ile Cinsiyet arasında ilişki yoktur

H_1: Kurs sonu başarı durumu ile Cinsiyet arasında ilişki vardır

Cinsiyet	Kurs		Toplam
	Başarılı	Başarısız	
Bayan	15 **10,2**	5 **9,8**	20
Erkek	8 **12,8**	17 **12,2**	25
Toplam	23	22	45

$$\chi^2 = \sum\sum \frac{(|G_{ij} - T_{ij}| - 0,5)^2}{T_{ij}} = \frac{(|15 - 10,2| - 0,5)^2}{10,2} + \frac{(|5 - 9,8| - 0,5)^2}{9,8}$$

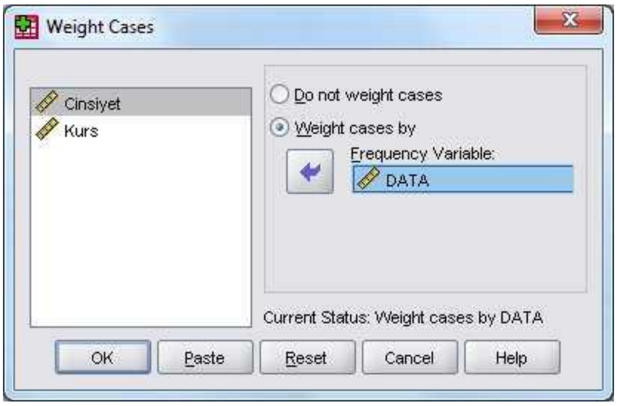
$$+ \frac{(|8 - 12,8| - 0,5)^2}{12,8} + \frac{(|17 - 12,2| - 0,5)^2}{12,2} = 8,6$$

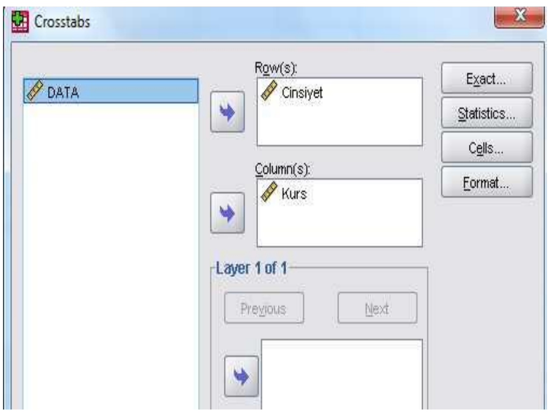
Serbestlik derecesi=(R-1)*(C-1)=(2-1)*(2-1)=1

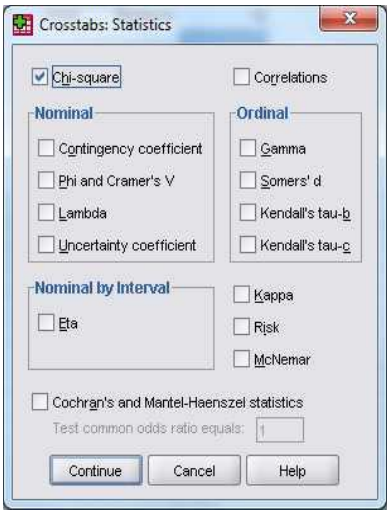
$\chi^2 = 8,6 > \chi^2_{0.05,1} = 3,84$ H_0 red edilir. Kurs sonu başarı ile cinsiyet arasında bir ilişki vardır.

SPSS ÇÖZÜM:

Cinsiyet	Kurs	DATA
Bayan	Başarılı	27
Bayan	Başarısız	13
Erkek	Başarılı	48
Erkek	Başarısız	12







cinsiyet * Kurs Crosstabulation

			Kurs		Total
			Başarılı	Başarısız	
cinsiyet	Bayan	Count	15	5	20
		Expected Count	10,2	9,8	20,0
	Erkek	Count	8	17	25
		Expected Count	12,8	12,2	25,0
Total		Count	23	22	45
		Expected Count	23,0	22,0	45,0

Beklenen değerlerden en az biri 25’ten küçük ve toplam örnek sayısı n<50 olduğundan Yates Ki-kare testi kullanılır.

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	8,222[a]	1	,004		
Continuity Correction[b]	6,591	1	,010		
Likelihood Ratio	8,524	1	,004		
Fisher's Exact Test				,007	,005
Linear-by-Linear Association	8,039	1	,005		
N of Valid Cases	45				

a. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 9,78.

b. Computed only for a 2x2 table

P=0,01<0,05 olup cinsiyet ile kurs başarısı arasında istatistiksel olarak anlamlı bir ilişki vardır.

Kontenjans Katsayısı

İki değişken nicel ise ilişki derecesi korelasyon katsayısı ile; değişkenler nitel ise kontenjans katsayısı ile ölçülür. Kontenjans katsayısı nitel iki değişken arasındaki ilişkinin derecesini belirleyen bir katsayıdır. rxc tablolarında ki-kare değerinin gösterdiği ilişki düzeyini belirlemede kullanılır. İki değişken arasında bir ilişki bulunmuyorsa c=0 olur. İlişki yüksekse c 1’e yakın bir değer verir.

$$c = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

Örnek 5.4. Bölgesel satış yapan bir üretim işletmesi 2 yeni ürün geliştirerek piyasaya sürmüştür. Tüketicilerin görüşlerini belirlemek amacıyla bir rassal örneklem oluşturulmuştur. Sonuçlar aşağıdaki gibi bulunmuştur. Ürün türü ile tüketici görüşleri arasında bir ilişki var mıdır. %5 anlamlılık düzeyinde test ediniz ve ilişkinin derecesini belirtiniz. Tablo:5.99

Ürünler	Tüketici Görüşleri			Toplam
	Beğenen	Beğenmeyen	İlgisiz	
I.Ürün	60	30	10	100
II.Ürün	80	50	20	150
Toplam	140	80	30	250

H_0: Ürün türü ile tüketici görüşleri arasında ilişki yoktur.

H_1: Ürün türü ile tüketici görüşleri arasında ilişki vardır.

Ürünler	Tüketici Görüşleri			Toplam
	Beğenen	Beğenmeyen	İlgisiz	
I.Ürün	60 **56**	30 **32**	10 **21**	100
II.Ürün	80 **84**	50 **32**	20 **21**	150
Toplam	140	80	30	250

$$\chi^2 = \sum\sum \frac{(G_{ij} - T_{ij})^2}{T_{ij}} = \frac{(60-56)^2}{56} + \frac{(30-32)^2}{32} + ... + \frac{(20-21)^2}{21}$$

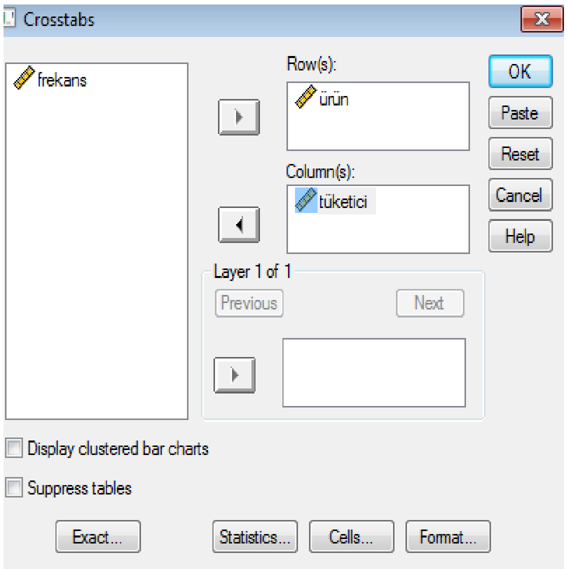
$$= 1{,}24$$

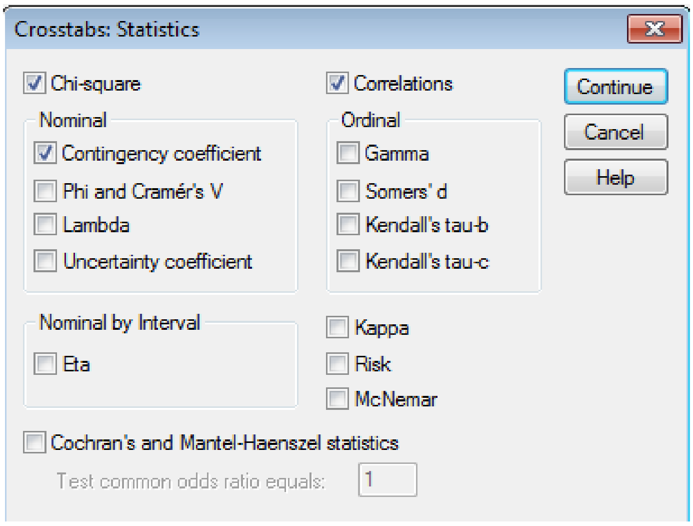
Serbestlik derecesi=(R-1)*(C-1)=(2-1)*(3-1)=2

$\chi^2 = 1{,}24 < \chi^2_{0.05,\,2} = 5{,}99$ H_0 kabul edilir. ürün ile tüketici görüşleri arsında bir ilişki yoktur.

SPSS ÇÖZÜM:

	ürün	tüketici	frekans
1	1	1	60
2	1	2	30
3	1	3	10
4	2	1	80
5	2	2	50
6	2	3	20





Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	1,240[a]	2	,538
N of Valid Cases	250		

a. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 12,00.

Symmetric Measures

		Value	Asymp. Std. Error[a]	Approx. T[b]	Approx. Sig.
Nominal by Nominal	Contingency Coefficient	,070			,538
Interval by Interval	Pearson's R	,070	,062	1,109	,269[c]
Ordinal by Ordinal	Spearman Correlation	,070	,063	1,105	,270[c]
N of Valid Cases		250			

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.

c. Based on normal approximation.

P=0,538>0,05 H_0 red edilemez yani iki değişken arasında ilişki yoktur. İlişki katsayısı 0.07 yani çok düşüktür.

5.3. Mc-Nemar Testi

2x2 tablolarda bir örnek grup üzerinde iki farklı uygulama yapıldığını (örneğin bağımlı olduğunu) ve iki ölçüm arasındaki farkın anlamlı olup olmadığını test eder.

$$\chi^2 = \frac{(B-C)^2}{B+C}$$

Eğer B+C<25 ise test istatistiği aşağıdaki gibi düzeltilir.

$$\chi^2 = \frac{(|B-C|-1)^2}{B+C}$$

Serbestlik derecesi 1 dir. $\chi^2_{1,\alpha} \leq \chi^2_h$ ise H_0 reddedilir.

Örnek 5.5. 160 kişinin raylı sitemden önce ve sonra belediye hakkındaki görüşlerinde bir değişiklik olup olmadığına dair yapılan bir araştırmadan aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir. İnsanların görüşünde önemli bir değişiklik olmuş mudur. %5 önem düzeyinde karar veriniz. Tablo:3.84

Raylı sistem öncesi	Raylı sistem sonrası		Toplam
	Olumlu	Olumsuz	
Olumlu	45	35	80
Olumsuz	30	50	80
Toplam	75	85	160

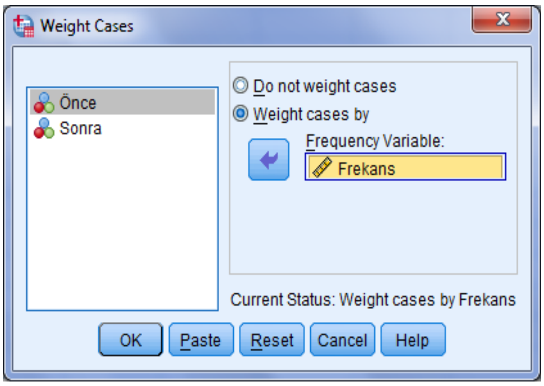
$$\chi^2 = \frac{(B-C)^2}{B+C}$$

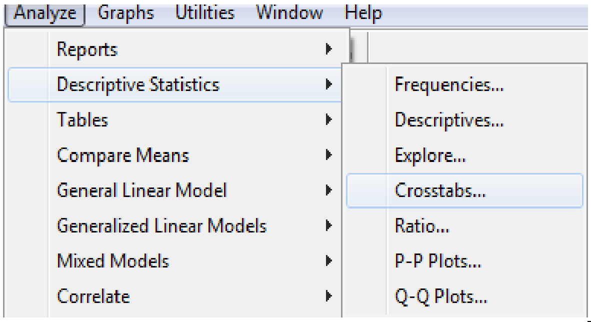
$=(35\text{-}30)^2/(35+30)=0{,}38$

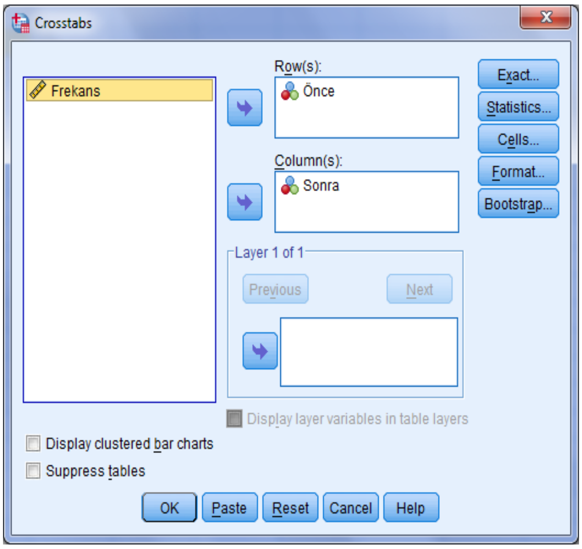
Tablo=3.84>0.38 olduğundan raylı sistemden önce ve sonrasında insanların belediye hakkındaki görüşlerinde önemli bir değişiklik olmamıştır.

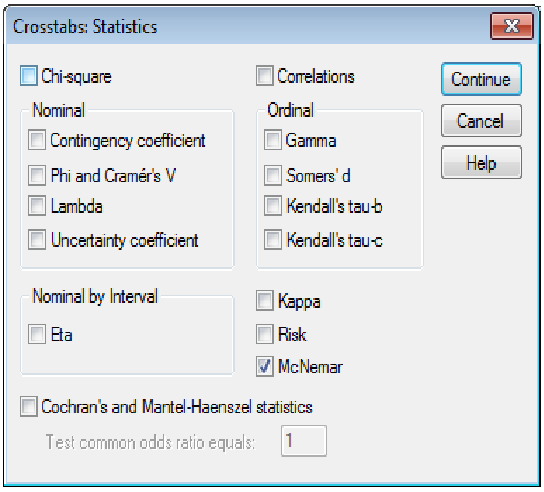
<u>SPSS Çözüm:</u>

	Önce	Sonra	Frekans
1	1	1	45
2	1	2	35
3	2	1	30
4	2	2	50









once * sonra Crosstabulation

Count

		sonra		
		+	-	Total
once	+	13	8	21
	-	6	3	9
Total		19	11	30

Chi-Square Tests

	Value	Exact Sig. (2-sided)
McNemar Test		,620[a]
N of Valid Cases	160	

a. Binomial distribution used.

P=0,620>0,05 H_0 red edilemez. Görüşlerde bir değişiklik olmamıştır.

5.4.Cohen Kappa

İki gözlemcinin yaptığı değerlendirmeler arasındaki uyumu belirlemek için kullanılır. Cohen(1960) tarafından geliştirilmiştir.

$$\kappa = \frac{GUO - BUO}{1 - BUO}$$

GUO (Gözlenen uyum oranı): Her iki gözlemcinin benzer puanlar vermesi veya değerlendirmeler yapması

BUO (Beklenen uyum oranı) : Satır toplamları ile sütun toplamlarının çarpımlarının toplam değerlendirme sayısına bölünmesiyle elde edilen toplamların tekrar toplam değerlendirme sayısına oranıdır.

Değerlendirme verilerinde gözlemcilerin uyuştukları puanlar karşılaştırma matrisinin köşegenindeki hücrelere yazılır. Uyuşmadıkları değerler ise köşegen dışındaki harflerin kesiştiği hücrelere yazılır.

Eğer Kappa sıfır ise şansın dışında bir uyum söz konusu değildir. Kappa bir ise iki test arasındaki uyumun tam olduğunu ifade eder. Kappa hangi yöntemin daha iyi olduğunu göstermez yöntemler arasındaki uyumu gösterir.2x2 lik bir tabloda Kappa hesabı yapılması:

		II.Expert		
I.Expert		+	-	Toplam
	+	A	B	A+B
	-	C	D	C+D
Toplam		A+C	B+D	N

(A+D) : İ ki testte de aynı sonucu elde etme sayısı

O=(A+D)/N : Her iki test de aynı sonucu elde etme oranı

(B+C) : Her iki testte farklı sonuç elde etme sayısı

E=[(A+B)/N*(A+C)/N]+[(C+D)/N*(B+D)/N] : Aynı sonucu elde etmenin beklenen şansı

1-E : Beklenen gerçek uyum miktarı

[(A+D)/N]-E : Gözlenen gerçek uyum. Buradan Kappa hesaplanabilir

Kappa= {[(A+D)/N]-E}/(1-E)

Uyumun Mükemmelliği

Kappa	Uyumun Gücü
<0,4	Zayıf
0.41-0.60	Orta
0.61-0.80	İyi
0.81-1.00	Çok iyi

Örnek 5.6. Bir gölgedeki binaların kira fiyatları iki farklı expert tarafından normal ve yüksek olarak tespit edilmiştir. Bu iki expertin yapmış oldukları tespitler arasında bir uyum var mıdır?.

	II.Expert			
		Normal	Yüksek	$\sum$
I.Expert	Normal	20	12	32
	Yüksek	2	16	18
	$\sum$	22	28	50

(A+D)/N=36/50=0.72

E=[(A+B)/N*(A+C)/N]+[(C+D)/N*(B+D)/N]=32/50*22/50+18/50*28/50=0.483

Gözlenen Gerçek uyum=(Gözlenen Toplam uyum – Şans uyumu)

=0.72-0.483=0.237

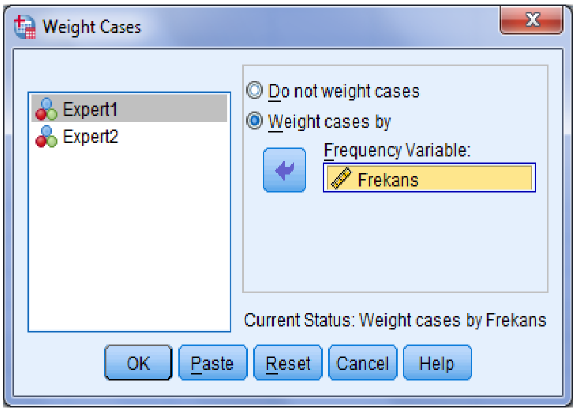
Beklenen gerçek uyum=1-E=1-0.483=0.517

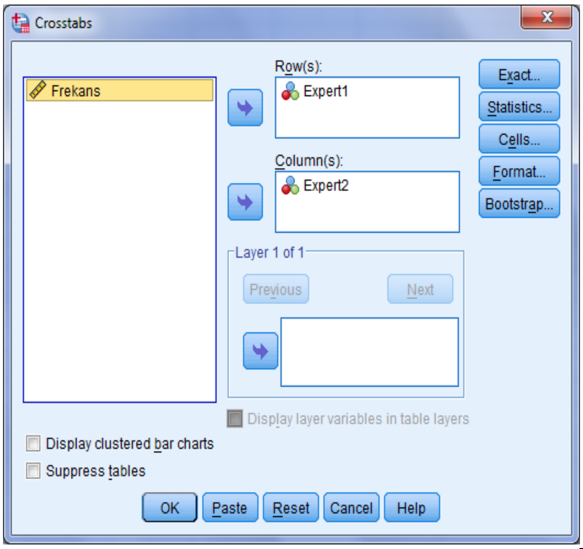
Kappa=0.237/0.517=0.458

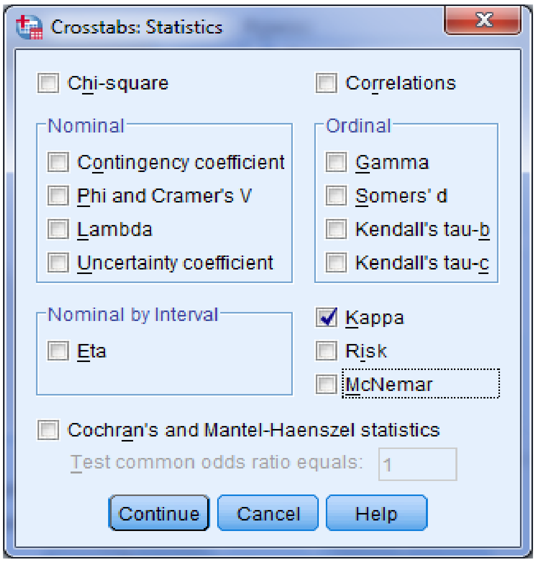
Her iki expert arasındaki uyumun fazla olduğu söylenemez.

<u>SPSS ÇÖZÜM:</u>

	Expert1	Expert2	Frekans
1	1	1	20
2	1	2	12
3	2	1	2
4	2	2	16







Expert1 * Expert2 Crosstabulation

			Expert2		
			Normal	Yüksek	Total
Expert1	Normal	Count	20	12	32
		% within Expert1	62,5%	37,5%	100,0%
	Yüksek	Count	2	16	18
		% within Expert1	11,1%	88,9%	100,0%
Total		Count	22	28	50
		% within Expert1	44,0%	56,0%	100,0%

Symmetric Measures

		Value	Asymp. Std. Error[a]	Approx. T[b]	Approx. Sig.
Measure of Agreement	Kappa	,458	,114	3,514	,000
N of Valid Cases		50			

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.

İki expert arasında iyi uyum olduğu söylenemez.

EKLER: TABLOLAR

Z-TABLOSU

Z	Cum p	Tail p	Z	Cum p	Tail p	Z	Cum p	Tail p	Z	Cum p	Tail p	Z	Cum p	Tail p
0.00	0.5000	0.5000	0.40	0.6554	0.3446	0.80	0.7881	0.2119	1.20	0.8849	0.1151	1.60	0.9452	0.0548
0.01	0.5040	0.4960	0.41	0.6591	0.3409	0.81	0.7910	0.2090	1.21	0.8869	0.1131	1.61	0.9463	0.0537
0.02	0.5080	0.4920	0.42	0.6628	0.3372	0.82	0.7939	0.2061	1.22	0.8888	0.1112	1.62	0.9474	0.0526
0.03	0.5120	0.4880	0.43	0.6664	0.3336	0.83	0.7967	0.2033	1.23	0.8907	0.1093	1.63	0.9484	0.0516
0.04	0.5160	0.4840	0.44	0.6700	0.3300	0.84	0.7995	0.2005	1.24	0.8925	0.1075	**1.64**	**0.9495**	**0.0505**
0.05	0.5199	0.4801	0.45	0.6736	0.3264	0.85	0.8023	0.1977	1.25	0.8944	0.1056	1.65	0.9505	0.0495
0.06	0.5239	0.4761	0.46	0.6772	0.3228	0.86	0.8051	0.1949	1.26	0.8962	0.1038	1.66	0.9515	0.0485
0.07	0.5279	0.4721	0.47	0.6808	0.3192	0.87	0.8078	0.1922	1.27	0.8980	0.1020	1.67	0.9525	0.0475
0.08	0.5319	0.4681	0.48	0.6844	0.3156	0.88	0.8106	0.1894	1.28	0.8997	0.1003	1.68	0.9535	0.0465
0.09	0.5359	0.4641	0.49	0.6879	0.3121	0.89	0.8133	0.1867	1.29	0.9015	0.0985	1.69	0.9545	0.0455
0.10	0.5398	0.4602	0.50	0.6915	0.3085	0.90	0.8159	0.1841	1.30	0.9032	0.0968	1.70	0.9554	0.0446
0.11	0.5438	0.4562	0.51	0.6950	0.3050	0.91	0.8186	0.1814	1.31	0.9049	0.0951	1.71	0.9564	0.0436
0.12	0.5478	0.4522	0.52	0.6985	0.3015	0.92	0.8212	0.1788	1.32	0.9066	0.0934	1.72	0.9573	0.0427
0.13	0.5517	0.4483	0.53	0.7019	0.2981	0.93	0.8238	0.1762	1.33	0.9082	0.0918	1.73	0.9582	0.0418
0.14	0.5557	0.4443	0.54	0.7054	0.2946	0.94	0.8264	0.1736	1.34	0.9099	0.0901	1.74	0.9591	0.0409
0.15	0.5596	0.4404	0.55	0.7088	0.2912	0.95	0.8289	0.1711	1.35	0.9115	0.0885	1.75	0.9599	0.0401
0.16	0.5636	0.4364	0.56	0.7123	0.2877	0.96	0.8315	0.1685	1.36	0.9131	0.0869	1.76	0.9608	0.0392
0.17	0.5675	0.4325	0.57	0.7157	0.2843	0.97	0.8340	0.1660	1.37	0.9147	0.0853	1.77	0.9616	0.0384
0.18	0.5714	0.4286	0.58	0.7190	0.2810	0.98	0.8365	0.1635	1.38	0.9162	0.0838	1.78	0.9625	0.0375
0.19	0.5753	0.4247	0.59	0.7224	0.2776	0.99	0.8389	0.1611	1.39	0.9177	0.0823	1.79	0.9633	0.0367
0.20	0.5793	0.4207	0.60	0.7257	0.2743	1.00	0.8413	0.1587	1.40	0.9192	0.0808	1.80	0.9641	0.0359
0.21	0.5832	0.4168	0.61	0.7291	0.2709	1.01	0.8438	0.1562	1.41	0.9207	0.0793	1.81	0.9649	0.0351
0.22	0.5871	0.4129	0.62	0.7324	0.2676	1.02	0.8461	0.1539	1.42	0.9222	0.0778	1.82	0.9656	0.0344
0.23	0.5910	0.4090	0.63	0.7357	0.2643	1.03	0.8485	0.1515	1.43	0.9236	0.0764	1.83	0.9664	0.0336
0.24	0.5948	0.4052	0.64	0.7389	0.2611	1.04	0.8508	0.1492	1.44	0.9251	0.0749	1.84	0.9671	0.0329
0.25	0.5987	0.4013	0.65	0.7422	0.2578	1.05	0.8531	0.1469	1.45	0.9265	0.0735	1.85	0.9678	0.0322
0.26	0.6026	0.3974	0.66	0.7454	0.2546	1.06	0.8554	0.1446	1.46	0.9279	0.0721	1.86	0.9686	0.0314
0.27	0.6064	0.3936	0.67	0.7486	0.2514	1.07	0.8577	0.1423	1.47	0.9292	0.0708	1.87	0.9693	0.0307
0.28	0.6103	0.3897	0.68	0.7517	0.2483	1.08	0.8599	0.1401	1.48	0.9306	0.0694	1.88	0.9699	0.0301
0.29	0.6141	0.3859	0.69	0.7549	0.2451	1.09	0.8621	0.1379	1.49	0.9319	0.0681	1.89	0.9706	0.0294
0.30	0.6179	0.3821	0.70	0.7580	0.2420	1.10	0.8643	0.1357	1.50	0.9332	0.0668	1.90	0.9713	0.0287
0.31	0.6217	0.3783	0.71	0.7611	0.2389	1.11	0.8665	0.1335	1.51	0.9345	0.0655	1.91	0.9719	0.0281
0.32	0.6255	0.3745	0.72	0.7642	0.2358	1.12	0.8686	0.1314	1.52	0.9357	0.0643	1.92	0.9726	0.0274
0.33	0.6293	0.3707	0.73	0.7673	0.2327	1.13	0.8708	0.1292	1.53	0.9370	0.0630	1.93	0.9732	0.0268
0.34	0.6331	0.3669	0.74	0.7704	0.2296	1.14	0.8729	0.1271	1.54	0.9382	0.0618	1.94	0.9738	0.0262
0.35	0.6368	0.3632	0.75	0.7734	0.2266	1.15	0.8749	0.1251	1.55	0.9394	0.0606	1.95	0.9744	0.0256
0.36	0.6406	0.3594	0.76	0.7764	0.2236	1.16	0.8770	0.1230	1.56	0.9406	0.0594	**1.96**	**0.9750**	**0.0250**
0.37	0.6443	0.3557	0.77	0.7794	0.2206	1.17	0.8790	0.1210	1.57	0.9418	0.0582	1.97	0.9756	0.0244
0.38	0.6480	0.3520	0.78	0.7823	0.2177	1.18	0.8810	0.1190	1.58	0.9429	0.0571	1.98	0.9761	0.0239
0.39	0.6517	0.3483	0.79	0.7852	0.2148	1.19	0.8830	0.1170	1.59	0.9441	0.0559	1.99	0.9767	0.0233

Z	Cum p	Tail p	Z	Cum p	Tail p	Z	Cum p	Tail p	Z	Cum p	Tail p
2.00	0.9772	0.0228	2.40	0.9918	0.0082	2.80	0.9974	0.0026	3.20	0.9993	0.0007
2.01	0.9778	0.0222	2.41	0.9920	0.0080	2.81	0.9975	0.0025	3.21	0.9993	0.0007
2.02	0.9783	0.0217	2.42	0.9922	0.0078	2.82	0.9976	0.0024	3.22	0.9994	0.0006
2.03	0.9788	0.0212	2.43	0.9925	0.0075	2.83	0.9977	0.0023	3.23	0.9994	0.0006
2.04	0.9793	0.0207	2.44	0.9927	0.0073	2.84	0.9977	0.0023	3.24	0.9994	0.0006
2.05	0.9798	0.0202	2.45	0.9929	0.0071	2.85	0.9978	0.0022	3.25	0.9994	0.0006
2.06	0.9803	0.0197	2.46	0.9931	0.0069	2.86	0.9979	0.0021	3.26	0.9994	0.0006
2.07	0.9808	0.0192	2.47	0.9932	0.0068	2.87	0.9979	0.0021	3.27	0.9995	0.0005
2.08	0.9812	0.0188	2.48	0.9934	0.0066	2.88	0.9980	0.0020	3.28	0.9995	0.0005
2.09	0.9817	0.0183	2.49	0.9936	0.0064	2.89	0.9981	0.0019	3.29	0.9995	0.0005
2.10	0.9821	0.0179	2.50	0.9938	0.0062	2.90	0.9981	0.0019	3.30	0.9995	0.0005
2.11	0.9826	0.0174	2.51	0.9940	0.0060	2.91	0.9982	0.0018	3.31	0.9995	0.0005
2.12	0.9830	0.0170	2.52	0.9941	0.0059	2.92	0.9982	0.0018	3.32	0.9995	0.0005
2.13	0.9834	0.0166	2.53	0.9943	0.0057	2.93	0.9983	0.0017	3.33	0.9996	0.0004
2.14	0.9838	0.0162	2.54	0.9945	0.0055	2.94	0.9984	0.0016	3.34	0.9996	0.0004
2.15	0.9842	0.0158	2.55	0.9946	0.0054	2.95	0.9984	0.0016	3.35	0.9996	0.0004
2.16	0.9846	0.0154	2.56	0.9948	0.0052	2.96	0.9985	0.0015	3.36	0.9996	0.0004
2.17	0.9850	0.0150	**2.57**	**0.9949**	**0.0051**	2.97	0.9985	0.0015	3.37	0.9996	0.0004
2.18	0.9854	0.0146	2.58	0.9951	0.0049	2.98	0.9986	0.0014	3.38	0.9996	0.0004
2.19	0.9857	0.0143	2.59	0.9952	0.0048	2.99	0.9986	0.0014	3.39	0.9997	0.0003
2.20	0.9861	0.0139	2.60	0.9953	0.0047	3.00	0.9987	0.0013	3.40	0.9997	0.0003
2.21	0.9864	0.0136	2.61	0.9955	0.0045	3.01	0.9987	0.0013	3.41	0.9997	0.0003
2.22	0.9868	0.0132	2.62	0.9956	0.0044	3.02	0.9987	0.0013	3.42	0.9997	0.0003
2.23	0.9871	0.0129	2.63	0.9957	0.0043	3.03	0.9988	0.0012	3.43	0.9997	0.0003
2.24	0.9875	0.0125	2.64	0.9959	0.0041	3.04	0.9988	0.0012	3.44	0.9997	0.0003
2.25	0.9878	0.0122	2.65	0.9960	0.0040	3.05	0.9989	0.0011	3.45	0.9997	0.0003
2.26	0.9881	0.0119	2.66	0.9961	0.0039	3.06	0.9989	0.0011	3.46	0.9997	0.0003
2.27	0.9884	0.0116	2.67	0.9962	0.0038	3.07	0.9989	0.0011	3.47	0.9997	0.0003
2.28	0.9887	0.0113	2.68	0.9963	0.0037	3.08	0.9990	0.0010	3.48	0.9997	0.0003
2.29	0.9890	0.0110	2.69	0.9964	0.0036	3.09	0.9990	0.0010	3.49	0.9998	0.0002
2.30	0.9893	0.0107	2.70	0.9965	0.0035	3.10	0.9990	0.0010	3.50	0.9998	0.0002
2.31	0.9896	0.0104	2.71	0.9966	0.0034	3.11	0.9991	0.0009			
2.32	0.9898	0.0102	2.72	0.9967	0.0033	3.12	0.9991	0.0009	3.60	0.9998	0.0002
2.33	**0.9901**	**0.0099**	2.73	0.9968	0.0032	3.13	0.9991	0.0009	3.70	0.9999	0.0001
2.34	0.9904	0.0096	2.74	0.9969	0.0031	3.14	0.9992	0.0008	3.80	0.9999	0.0001
2.35	0.9906	0.0094	2.75	0.9970	0.0030	3.15	0.9992	0.0008	3.90	1.0000	0.0000
2.36	0.9909	0.0091	2.76	0.9971	0.0029	3.16	0.9992	0.0008			
2.37	0.9911	0.0089	2.77	0.9972	0.0028	3.17	0.9992	0.0008			
2.38	0.9913	0.0087	2.78	0.9973	0.0027	3.18	0.9993	0.0007			
2.39	0.9916	0.0084	2.79	0.9974	0.0026	3.19	0.9993	0.0007			

Z Tablo

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998

t- tablosu

Probabilities Under the *t*-Distribution Curve									
1-Tail	**0.2000**	**0.1500**	**0.1000**	**0.0500**	**0.0250**	**0.0100**	**0.0050**	**0.0010**	**0.0005**
2-Tail	**0.4000**	**0.3000**	**0.2000**	**0.1000**	**0.0500**	**0.0200**	**0.0100**	**0.00200**	**0.0010**
Conf Lev.	**0.6000**	**0.7000**	**0.8000**	**0.9000**	**0.9500**	**0.9800**	**0.9900**	**0.9980**	**0.9990**
df									
1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496

Ki-Kare Tablosu

	Area in Right Tail of Distribution									
df	**0.995**	**0.99**	**0.975**	**0.95**	**0.90**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**
1	—	—	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672

F Tablosu:

α=0.05 için F Tablosu

Area in the Right Tail of Distribution = 0.05										
	D_1									
D_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543	241.882
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348

Area in the Right Tail of Distribution = 0.05										
	D_1									
D_2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	242.983	243.906	244.690	245.364	245.950	246.464	246.918	247.323	247.686	248.013
2	19.405	19.413	19.419	19.424	19.429	19.433	19.437	19.440	19.443	19.446
3	8.763	8.745	8.729	8.715	8.703	8.692	8.683	8.675	8.667	8.660
4	5.936	5.912	5.891	5.873	5.858	5.844	5.832	5.821	5.811	5.803
5	4.704	4.678	4.655	4.636	4.619	4.604	4.590	4.579	4.568	4.558
6	4.027	4.000	3.976	3.956	3.938	3.922	3.908	3.896	3.884	3.874
7	3.603	3.575	3.550	3.529	3.511	3.494	3.480	3.467	3.455	3.445
8	3.313	3.284	3.259	3.237	3.218	3.202	3.187	3.173	3.161	3.150
9	3.102	3.073	3.048	3.025	3.006	2.989	2.974	2.960	2.948	2.936
10	2.943	2.913	2.887	2.865	2.845	2.828	2.812	2.798	2.785	2.774
11	2.818	2.788	2.761	2.739	2.719	2.701	2.685	2.671	2.658	2.646
12	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617	2.599	2.583	2.568	2.555	2.544
13	2.635	2.604	2.577	2.554	2.533	2.515	2.499	2.484	2.471	2.459
14	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463	2.445	2.428	2.413	2.400	2.388
15	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403	2.385	2.368	2.353	2.340	2.328
16	2.456	2.425	2.397	2.373	2.352	2.333	2.317	2.302	2.288	2.276
17	2.413	2.381	2.353	2.329	2.308	2.289	2.272	2.257	2.243	2.230
18	2.374	2.342	2.314	2.290	2.269	2.250	2.233	2.217	2.203	2.191
19	2.340	2.308	2.280	2.256	2.234	2.215	2.198	2.182	2.168	2.155
20	2.310	2.278	2.250	2.225	2.203	2.184	2.167	2.151	2.137	2.124

F Tablosu:

α=0.01 için F Tablosu

Area in the Right Tail of Distribution = 0.01										
	D_1									
D_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.6	5859.0	5928.4	5981.1	6022.5	6055.8
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368

Area in the Right Tail of Distribution = 0.01										
	D_1									
D_2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	6083.3	6106.3	6125.9	6142.7	6157.3	6170.1	6181.4	6191.5	6200.6	6208.7
2	99.408	99.416	99.422	99.428	99.433	99.437	99.440	99.444	99.447	99.449
3	27.133	27.052	26.983	26.924	26.872	26.827	26.787	26.751	26.719	26.690
4	14.452	14.374	14.307	14.249	14.198	14.154	14.115	14.080	14.048	14.020
5	9.963	9.888	9.825	9.770	9.722	9.680	9.643	9.610	9.580	9.553
6	7.790	7.718	7.657	7.605	7.559	7.519	7.483	7.451	7.422	7.396
7	6.538	6.469	6.410	6.359	6.314	6.275	6.240	6.209	6.181	6.155
8	5.734	5.667	5.609	5.559	5.515	5.477	5.442	5.412	5.384	5.359
9	5.178	5.111	5.055	5.005	4.962	4.924	4.890	4.860	4.833	4.808
10	4.772	4.706	4.650	4.601	4.558	4.520	4.487	4.457	4.430	4.405
11	4.462	4.397	4.342	4.293	4.251	4.213	4.180	4.150	4.123	4.099
12	4.220	4.155	4.100	4.052	4.010	3.972	3.939	3.909	3.883	3.858
13	4.025	3.960	3.905	3.857	3.815	3.778	3.745	3.716	3.689	3.665
14	3.864	3.800	3.745	3.698	3.656	3.619	3.586	3.556	3.529	3.505
15	3.730	3.666	3.612	3.564	3.522	3.485	3.452	3.423	3.396	3.372
16	3.616	3.553	3.498	3.451	3.409	3.372	3.339	3.310	3.283	3.259
17	3.519	3.455	3.401	3.353	3.312	3.275	3.242	3.212	3.186	3.162
18	3.434	3.371	3.316	3.269	3.227	3.190	3.158	3.128	3.101	3.077
19	3.360	3.297	3.242	3.195	3.153	3.116	3.084	3.054	3.027	3.003
20	3.294	3.231	3.177	3.130	3.088	3.051	3.018	2.989	2.962	2.938

FORMÜLLER

One-Sample Hypothesis Test

Type	Sample	Population	σ	Test Statistic
mean	$n \geq 30$	any	known	$z_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$
mean	$n \geq 30$	any	unknown	$z_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$
mean	$n < 30$	normal	known	$z_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$
mean	$n < 30$	normal	unknown	$t_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$
proportion	$np \geq 5$ $nq \geq 5$	any		$z_{\bar{p}} = \dfrac{\bar{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$

Two-Sample Hypothesis Test

Type	Sample	Population	σ_1, σ_2	Test Statistic
mean	$n_1, n_2 \geq 30$ Independent samples	any	known	$z_{\bar{x}} = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
mean	$n_1, n_2 \geq 30$ Independent samples	any	unknown	$z_{\bar{x}} = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$
mean	$n_1, n_2 < 30$ Independent samples	normal	known	$z_{\bar{x}} = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
mean	$n_1, n_2 < 30$ Independent samples	normal	unknown and equal	$t_{\bar{x}} = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ $\quad df = n_1 + n_2 - 2$
mean	$n_1, n_2 < 30$ Independent samples	normal	unknown and unequal	$t_{\bar{x}} = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$ $\quad df = \dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$
proportion	$np \geq 5$ $nq \geq 5$ Independent samples	any		$z_{\bar{p}} = \dfrac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{(\hat{p})(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ $\quad \hat{p} = \dfrac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$

Regression and ANOVA Equations

Correlation Equations

$$r = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\left[n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right]\left[n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right]}}$$

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}}$$

Regression slope and y-intercept

$$b = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

$$a = \frac{\sum y}{n} - b\left(\frac{\sum x}{n}\right)$$

Sum of Square Equations

$$SST = \sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n}$$

$$SSE = \sum y^2 - a\sum y - b\sum xy$$

$$SSR = SST - SSE$$

Coefficient of Determination Equations

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \qquad F = \frac{SSR}{\left(\frac{SSE}{n-2}\right)}$$

Significance of slope equations

$$s_e = \frac{SSE}{n-2} \qquad t = \frac{b - \beta}{s_b}$$

$$s_b = \frac{s_e}{\sqrt{\sum x^2 - n(\bar{x})^2}} \qquad CI = b \pm t_c s_b$$

ANOVA Equations (completely randomized design)

$$SST = \sum_{i=1}^{n_T} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n_T} x_i\right)^2}{n_T} \qquad SSB = \sum_{i=1}^{k} n_i\left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}\right)^2 \qquad SSW = SST - SSB$$

$$MSB = \frac{SSB}{k-1} \qquad MSW = \frac{SSW}{n_T - k} \qquad F = \frac{MSB}{MSW}$$

KAYNAKLAR

- ✓ Kartal, M. (2006). Bilimsel Araştırmalarda Hipotez Testleri, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- ✓ Ünver, Ö., Gamgam, H., Altunkaynak, B. (2013). Uygulamalı istatistik Yöntemler, Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- ✓ Serper, Ö. (2000). Uygulamalı İstatistik I,II. Ezgi Kitabevi, Bursa.
- ✓ Tekin, V.N. (2006). İstatistiğe Giriş, Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- ✓ Spigel, MR. and Stephens LJ. (1999). İstatistik, Schaum's Outlines, Çeviri editörleri: Alptekin Esin ve Salih Çelebioğlu, Nobel Dağıtım.
- ✓ Çil, B.(2004). İstatistik, Detay Yayıncılık, Ankara.
- ✓ Şenesen, Ü. (2002). Matematiksel İstatistik, Literatür Yayınları, İstanbul.
- ✓ Akdeniz, F.(1984). Olasılık ve İstatistik, Ankara Ünv. Basımevi, Ankara.
- ✓ Çömlekçi, N.(1994). Temel İstatistik, Bilim Teknik Yayınevi, İstanbul.
- ✓ Işık, A. (2006). Uygulamalı İstatistik I-II, Beta Yayınları, İstanbul.
- ✓ Karagöz, M. (2009). İstatistik Yöntemleri, Ekin Basın yayın Dağıtım, Bursa.
- ✓ Gavcar, E. (2013). İstatistik Yöntemler, Gazi Kitapevi, Ankara.